# Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º/11.º anos ou 11.º/12.º anos de Escolaridade

## Prova 835/2.ª Fase

11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter quando estas não estão apresentadas no próprio enunciado.

As cotações dos itens encontram-se na página 9.

A prova inclui um Formulário nas páginas 10 e 11.

**1.** Os alunos do 12.º ano da Escola «Bom Estudante» pretendem organizar uma viagem de finalistas a uma cidade espanhola. Os delegados das oito turmas reuniram-se para escolher essa cidade. Como não conseguiram consenso, decidiram que seriam todos os alunos do 12.º ano a eleger o destino da viagem, sendo Granada, Madrid, Sevilha e Vigo as cidades colocadas à votação.

Cada aluno, no seu boletim de voto, ordena as quatro cidades, de acordo com a ordem das suas preferências, sendo o seu voto atribuído à cidade colocada em primeira preferência.

Na tabela (quadro de preferências) que se segue, estão registados as sequências das preferências obtidas na votação e o número correspondente de boletins.

| **Preferências** | **Votos** | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.ª** | Madrid | Vigo | Sevilha | Granada | Madrid | Granada |
| **2.ª** | Sevilha | Sevilha | Granada | Madrid | Vigo | Sevilha |
| **3.ª** | Granada | Granada | Vigo | Vigo | Sevilha | Madrid |
| **4.ª** | Vigo | Madrid | Madrid | Sevilha | Granada | Vigo |
| **Total de votos** | **50** | **60** | **40** | **14** | **30** | **22** |

O método escolhido para apurar a cidade a eleger como destino da viagem de finalistas foi o método preferencial, de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- contabiliza-se o número de votos obtidos, na primeira preferência, por cada cidade;
- caso uma cidade obtenha a maioria absoluta de votos na primeira preferência, ela é eleita vencedora e o processo termina;
- caso contrário, elimina-se da eleição a cidade que obteve o menor número de votos, na primeira preferência, e o quadro de preferências é reestruturado, passando a incluir menos uma cidade (consequentemente, também menos uma preferência);
- a este «novo» quadro de preferências, aplicam-se novamente todos os procedimentos anteriores, pela ordem enunciada;
- o processo repete-se até uma das cidades obter maioria absoluta de votos, na primeira preferência.

Tendo em conta os resultados da votação expressos na tabela:

**1.1.** Calcule o número de votos que cada uma das cidades obteve, na primeira preferência.

**1.2.** Indique o número mínimo de votos que uma cidade deveria ter obtido, na primeira preferência, para ser eleita vencedora na primeira contagem.

**1.3.** Determine, segundo o método descrito, qual é a cidade aonde se vai realizar a viagem de finalistas.

Na sua resposta deve incluir, obrigatoriamente, o número de votos obtidos, na primeira preferência, por cada cidade, em cada uma das contagens que efectuar para determinar a cidade a visitar.

**1.4.** Determine quantos alunos frequentam o 12.º ano de escolaridade na Escola «Bom Estudante», sabendo que 4% dos alunos do 12.º ano não votaram.

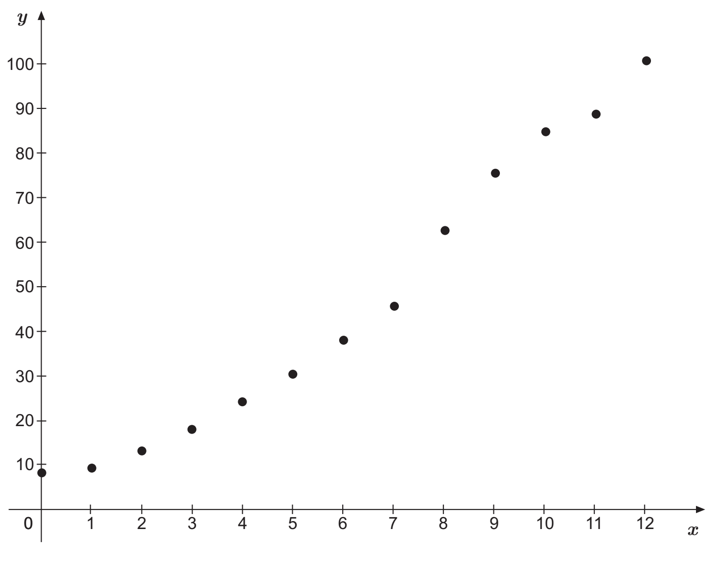
**2.** Na actualidade, há uma crescente preocupação com a preservação da natureza, nomeadamente, quanto à necessidade de proteger espécies que se encontram em vias de extinção.

Considere que uma certa espécie animal se encontrava em vias de extinção. Para a proteger, tomaram--se medidas proteccionistas, designadamente, a criação de uma área protegida, no seu habitat natural.

Admita que, no início, apenas existiam 8 animais da espécie nessa área. A tabela seguinte traduz a contagem anual do número de animais nela existentes.

| **Anos decorridos desde a criação da área protegida $(x)$** | **Número de animais existentes na área protegida $(y)$** |
|---|---|
| 0 | 8 |
| 1 | 9 |
| 2 | 13 |
| 3 | 18 |
| 4 | 24 |
| 5 | 30 |
| 6 | 38 |
| 7 | 45 |
| 8 | 62 |
| 9 | 75 |
| 10 | 84 |
| 11 | 88 |
| 12 | 100 |

O gráfico seguinte representa os dados da tabela, através de uma nuvem de pontos.



**2.1.** Com recurso à calculadora, determine o modelo de regressão linear, de equação $y = ax + b$, que se ajusta à nuvem de pontos apresentada.

Indique os valores de $a$ e de $b$, com uma aproximação às décimas.

**2.2.** Um modelo alternativo ao modelo de regressão linear, que podemos ajustar à nuvem de pontos apresentada, é o modelo logístico. No caso concreto, o recurso à calculadora permite obter o modelo logístico de equação

$$y = \frac{125,445}{1 + 18,351 \times e^{-0,355\,x}}$$

De acordo com este modelo, estime o número de animais existentes, na área protegida, 20 anos após a criação da mesma.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, utilize três casas decimais.

**2.3.** As grandes áreas territoriais ocupadas pela espécie e os recursos alimentares disponíveis são alguns dos factores que condicionam o número de animais na área protegida.

Suponha que se previa que esta área viria a atingir a sua capacidade máxima, quanto à população de animais desta espécie, aproximadamente 25 anos após a sua criação.

Num pequeno texto, indique, justificando, de entre o modelo de regressão linear (por si determinado no item **2.1.**) e o modelo logístico (apresentado no item **2.2.**), qual é o que interpreta a situação descrita para o primeiro meio século de existência da área protegida.

No seu texto deve, obrigatoriamente, referir duas razões distintas: uma que fundamente a sua opção quanto à eliminação de um dos modelos e outra que apoie a sua escolha do outro modelo.

Caso não tenha respondido ao item **2.1.**, e somente neste caso, considere que a equação do modelo de regressão linear é $y = 8{,}3x - 3{,}4$.

**3.** Diversos estudos destacam a importância dos hábitos de leitura no desenvolvimento do nível de literacia (capacidade de processamento da informação escrita na vida quotidiana). No sentido de incentivar o gosto pela leitura, o Governo Português tem implementado vários projectos como, por exemplo, o Plano Nacional de Leitura.

Em Outubro de 2007, o Gabinete de Estatística e Planeamento da Educação (GEPE), do Ministério da Educação, publicou um estudo intitulado «Os Estudantes e a Leitura», cuja intenção foi fornecer indicações sobre o desenvolvimento de apetências e capacidades de leitura dos estudantes portugueses dos ensinos básico e secundário.

O estudo foi conduzido, no ano lectivo 2006/2007, por meio de inquéritos a estudantes portugueses dos diferentes ciclos de escolaridade, utilizando amostras representativas de cada uma das populações em estudo.

Relativamente aos alunos que frequentavam o ensino secundário, a amostra foi recolhida em 61 escolas do Continente, sendo constituída por 4738 alunos, dos quais 43% pertenciam ao sexo masculino e 57% ao feminino.

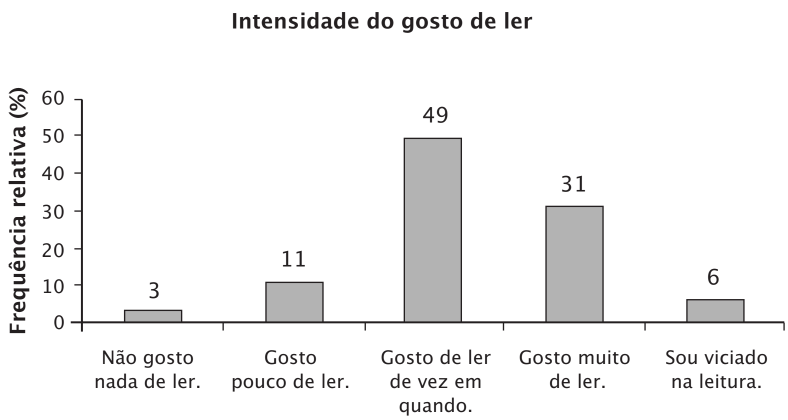
Uma das questões incluídas no inquérito era:

*«Qual das seguintes frases exprime melhor o teu gosto pela leitura?*

*– Sou viciado na leitura.*
*– Gosto muito de ler.*
*– Gosto de ler de vez em quando.*
*– Gosto pouco de ler.*
*– Não gosto nada de ler.»*

O gráfico e a tabela que se apresentam de seguida traduzem as respostas obtidas à questão anterior, em função do sexo:

- o gráfico refere-se ao sexo feminino e apresenta as frequências relativas em percentagem



- a tabela refere-se ao sexo masculino e apresenta as frequências relativas acumuladas em percentagem.

| **Intensidade do gosto de ler** | **Frequência relativa acumulada (%)** |
|---|---|
| Não gosto nada de ler. | 12 |
| Gosto pouco de ler. | 38 |
| Gosto de ler de vez em quando. | 82 |
| Gosto muito de ler. | 97 |
| Sou viciado na leitura. | 100 |

**3.1.** Num pequeno texto, tendo em conta os dados apresentados no gráfico e na tabela, indique, justificando, se é verdadeira ou falsa a seguinte afirmação: «A moda da intensidade do gosto de ler é a mesma para ambos os sexos, mas, neste inquérito, as raparigas revelaram um maior gosto pela leitura do que os rapazes».

No seu texto deve, obrigatoriamente, apresentar todas as percentagens necessárias à sua fundamentação.

**3.2.** No inquérito referido – e de acordo com os elementos apresentados no estudo citado – dos 4738 estudantes inquiridos, 25 não responderam à questão mencionada *(Qual das seguintes frases exprime melhor o teu gosto pela leitura?)*. Dos estudantes que responderam a esta questão, 221 optaram por «Sou viciado na leitura.»

Com base nos dados relativos à amostra dos estudantes que responderam à questão, construa um intervalo com uma confiança de 95% para a proporção de estudantes do ensino secundário, do Continente, que se identificam como sendo apaixonados pela leitura («Sou viciado na leitura.»).

Nos cálculos intermédios, caso proceda a arredondamentos, utilize quatro casas decimais.

Relativamente aos valores dos extremos do intervalo, apresente-os arredondados às milésimas.

**4.** A Vanda decidiu investir na leitura durante as férias em casa da sua avó. Com esse objectivo, resolveu seleccionar dois livros da biblioteca da sua avó, de entre os seus três géneros preferidos: policial, aventura e romance de ficção científica.

Na biblioteca da sua avó, os livros pretendidos estão distribuídos por duas estantes, uma contendo apenas romances de ficção científica e a outra com 15 livros policiais e 20 livros de aventuras.

**4.1.** A avó da Vanda sugeriu-lhe que fizesse, da seguinte forma, a selecção da estante de onde quer retirar o primeiro livro: lançar dois dados equilibrados, numerados de 1 a 6, e registar a soma das pontuações das faces voltadas para cima. Caso a soma das pontuações seja um múltiplo de cinco, a Vanda escolherá um livro da estante que contém os romances de ficção científica. Caso contrário, seleccionará um livro da outra estante.

Qual é a probabilidade de a Vanda vir a seleccionar o primeiro livro para ler da estante que só contém romances de ficção científica?

Apresente o resultado na forma de fracção.

**Sugestão:** Pode ser-lhe útil construir uma tabela de dupla entrada.

**4.2.** Afinal, a Vanda preferiu seleccionar os dois livros da estante que contém os livros policiais e de aventuras.

Os livros estavam numerados de 1 a 35, sendo os primeiros 15 números referentes aos livros policiais e os restantes aos livros de aventuras. Por isso, a Vanda decidiu colocar, dentro de um saco opaco, as peças do jogo «loto», numeradas de 1 a 35, e retirar, ao acaso, sucessivamente e **sem reposição**, duas dessas peças.

Em cada uma das tiragens, a Vanda observou o número da peça retirada e seleccionou o livro com número igual ao dessa peça.

Seja $X$ a variável aleatória que representa o número de livros policiais seleccionados.

Através de uma tabela, apresente a distribuição de probabilidade (função massa de probabilidade) da variável aleatória $X$, que representa o número de livros policiais seleccionados pela Vanda.

Apresente as probabilidades na forma de fracção.

Na construção da tabela de distribuição de probabilidade, percorra as seguintes etapas:

- identifique os valores que a variável aleatória $X$ pode tomar;
- determine, para cada um desses valores, a probabilidade que lhe está associada.

**FIM**

## COTAÇÕES

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | | **57 pontos** |
| **1.1.** | 8 pontos | |
| **1.2.** | 10 pontos | |
| **1.3.** | 23 pontos | |
| **1.4.** | 16 pontos | |
| **2.** | | **53 pontos** |
| **2.1.** | 13 pontos | |
| **2.2.** | 15 pontos | |
| **2.3.** | 25 pontos | |
| **3.** | | **40 pontos** |
| **3.1.** | 15 pontos | |
| **3.2.** | 25 pontos | |
| **4.** | | **50 pontos** |
| **4.1.** | 16 pontos | |
| **4.2.** | 34 pontos | |
| **TOTAL** | | **200 pontos** |

# Formulário

## Teoria Matemática das Eleições

### Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série.

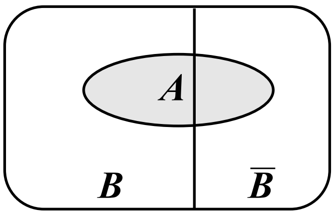
## Modelos de Grafos

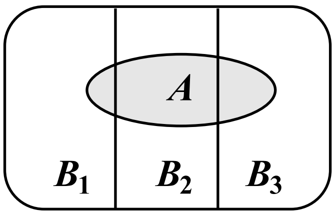
### Condição necessária e suficiente para que um grafo admita circuitos de Euler

Um grafo admite circuitos de Euler se e só se é conexo e todos os seus vértices são de grau par.

## Probabilidades

### Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes




$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$
$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$
$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo $k$ tomar os valores 1, 2 ou 3.

# Formulário (cont.)

## Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio $\mu$ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

$n$ – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
$\sigma$ – desvio padrão da variável
$z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio $\mu$ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

$n$ – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
$s$ – desvio padrão amostral
$z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção $p$, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}\,(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

$n$ – dimensão da amostra
$\hat{p}$ – proporção amostral
$z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de $z$ para os níveis de confiança mais usuais

| Nível de confiança | $90\%$ | $95\%$ | $99\%$ |
|---|---|---|---|
| $z$ | $1{,}645$ | $1{,}960$ | $2{,}576$ |