Prova Escrita de Matemática B

10.º/11.º anos ou 11.º/12.º anos de Escolaridade

Prova 735/2.ª Fase

8 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à sua calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora, apresente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na sua calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na sua calculadora (média, desvio-padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente as listas que introduziu na calculadora para as obter.

As cotações dos itens encontram-se na página 7.

A prova inclui um Formulário na página 8.

1. Numa região montanhosa, pretendia-se abrir um túnel em linha recta, unindo dois locais à mesma altitude. Devido à escassez de meios, seguiu-se um processo que era usado na Grécia Antiga.

No esquema da figura 1, que não está à escala, a região sombreada representa a montanha, e o segmento $[AF]$ o túnel. Este esquema ilustra o processo utilizado: sempre à mesma altitude, uma equipa técnica deslocou-se 750 metros para leste do ponto A, até ao ponto B; do ponto B, deslocou-se 450 metros para norte, até ao ponto C, e assim sucessivamente, até ao ponto F, tal como está indicado na figura.

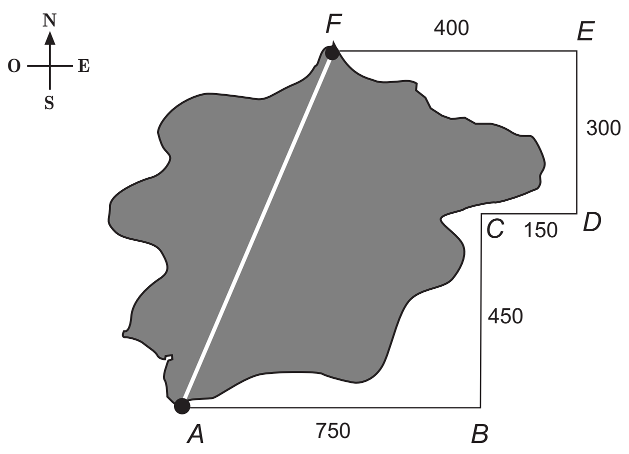

Fig. 1

No fim deste processo, a equipa decidiu-se a usar coordenadas cartesianas, para saber que direcção deveriam tomar as escavações.

Para esse efeito, imaginou o referencial com origem em A, indicado na figura 2. A unidade usada nos eixos foi o metro.

Tendo em conta este referencial, responda aos seguintes itens.

1.1. Indique as coordenadas dos pontos assinalados na figura $(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F)$.

1.2. Determine a equação reduzida da recta AF.

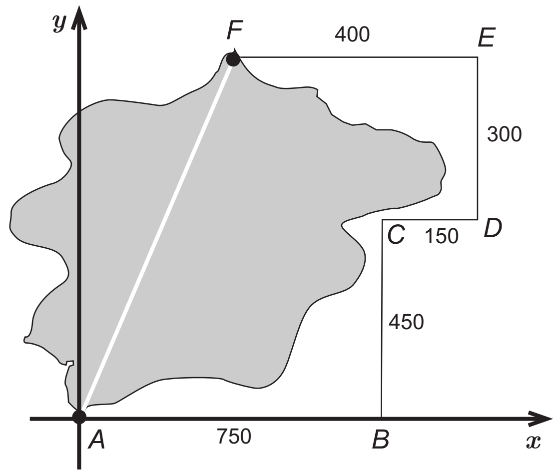

Fig. 2

2. Numa piscicultura, existe um tanque que tem actualmente 300 robalos. Ao serem introduzidas x trutas no tanque, a proporção $P(x)$ do número de trutas, relativamente ao número total de peixes que passam a existir no tanque, é tal que $P(x) = \dfrac{x}{300+x}$.

2.1. A equação $P(x) = 1$ é impossível.

Interprete esta impossibilidade no contexto da situação descrita.

2.2. Pretende-se que a percentagem de trutas, relativamente ao número total de peixes, seja de 25%.

Qual é o número de trutas a introduzir no tanque?

3. Admita agora que, no tanque, existem 300 robalos e 200 trutas.

3.1. Vai ser pescado, ao acaso, um peixe do tanque. Admita que cada peixe tem igual probabilidade de ser pescado.

Qual é a probabilidade de se pescar um robalo?

3.2. Foram retirados do tanque doze robalos. Os valores dos respectivos comprimentos e pesos são os que constam da seguinte tabela.

Comprimento a (em mm)	157	165	168	159	172	165	166	163	159	169	171	168
Peso p (em g)	52	61	67	60	70	65	66	62	58	72	72	68

Recorrendo à calculadora, determine o coeficiente de correlação linear entre as variáveis a e p, arredondado às centésimas.

Interprete o valor obtido, tendo em conta a nuvem de pontos que pode visualizar na calculadora.

4. Numa pequena cidade foi colocado, em lugar de destaque, um painel publicitário alusivo às ofertas turísticas da região.

4.1. O painel tem um mecanismo que faz accionar um ponto luminoso (ponto P), que descreve uma circunferência de centro O, com cinco metros de raio, tal como a figura 3 sugere.

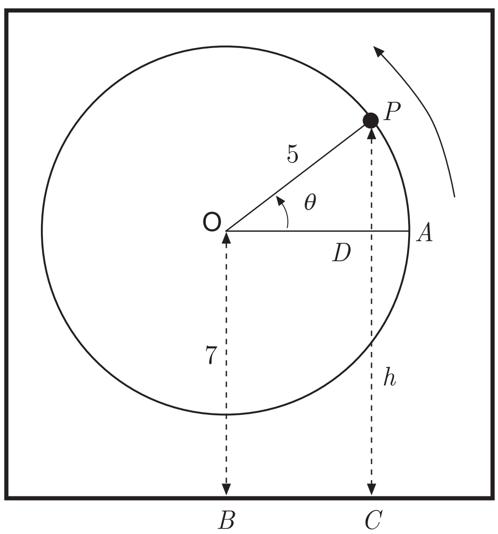

Fig. 3

Sejam:

- θ a amplitude, em graus, do ângulo orientado cujo lado origem é a semi-recta $\dot{O}A$ e cujo lado extremidade é a semi-recta $\dot{O}P$;
- $\overline{OB} = 7$;
- h a distância do ponto luminoso à base do painel.

Comece por completar a tabela seguinte, relativa a várias posições do ponto P, ao longo de uma volta.

$\boldsymbol{\theta}$	0^{o}	90^{o}	180^{o}	270^{o}	360^{o}
$\boldsymbol{h}$					

De seguida, mostre que, para $0^{\text{o}} < \theta < 90^{\text{o}}$, a distância, h, expressa em metros, do ponto luminoso à base do painel, é dada, em função de θ, por $h(\theta) = 7 + 5\, sen\, \theta$

4.2. Um gabinete de publicidade turística está a projectar um painel no qual figuram dez circunferências com o mesmo centro.

Conforme o projecto, a primeira circunferência terá 3 metros de raio, a segunda terá 3,10 metros de raio e assim sucessivamente, de acordo com uma progressão aritmética de razão 0,10 metros. Com o objectivo de fazer realçar o painel, à noite, pretende-se que cada uma destas dez circunferências fique coberta com fio luminoso.

Quantos metros de fio luminoso serão necessários para executar o projecto?

Apresente o resultado arredondado às centésimas. Nos valores intermédios, use sempre, pelo menos, três casas decimais.

5. Numa determinada região do interior, as chuvas torrenciais causaram inundações, e a região foi considerada zona de catástrofe. Os prejuízos acentuaram-se muito nas actividades agrícolas. Para enfrentar esta situação, os organismos ligados aos serviços agro-pecuários decidiram adquirir rações para animais. Foram pedidos, com urgência, dois tipos de ração: FarX e FarY.

A FARJO é uma fábrica especializada na produção destes tipos de ração. Estas rações contêm três aditivos: vitaminas, sabores e conservantes.

Por cada tonelada de ração do tipo FarX, são necessários dois quilogramas de vitaminas, um quilograma de sabores e um quilograma de conservantes.

Por cada tonelada de ração do tipo FarY, são necessários um quilograma de vitaminas, dois quilogramas de sabores e três quilogramas de conservantes.

A FARJO dispõe, diariamente, de 16 quilogramas de vitaminas, 11 quilogramas de sabores e 15 quilogramas de conservantes. Estas são as únicas restrições na produção destas rações.

Represente por x a quantidade de ração FarX produzida diariamente, expressa em toneladas, e por y a quantidade de ração FarY produzida diariamente, expressa em toneladas.

5.1. É possível a FARJO fabricar, num só dia, 4 toneladas de FarX e 3 toneladas de FarY?

Justifique.

5.2. Quais são as quantidades de ração de cada tipo que devem ser produzidas, de modo que a quantidade total de ração produzida diariamente seja máxima?

Percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indique as restrições do problema;
- indique a função objectivo;
- represente graficamente a região admissível, referente ao sistema de restrições;
- indique os valores das variáveis para os quais é máxima a função objectivo.

6. Sabe-se que Leonardo da Vinci (1456-1519) também se interessava por Matemática. Numa melancólica nota sobre a noite de 30 de Novembro de 1504, escreveu o seguinte, numa caligrafia regular e da direita para a esquerda (como costumava):

> *«Na noite de Santo André, encontrei a solução para a quadratura do círculo, quando se acabavam a candeia, a noite e o papel em que estava a escrever. Terminei-a de manhã»*.

Durante anos e anos, procuraram-se, entre os infindáveis cadernos que nos deixou, os manuscritos contendo as reflexões feitas naquela noite. Em vão: nunca foram encontrados.

Nas férias da Páscoa de 2008, o Manuel foi passar uns dias a casa dos avós. Vasculhando coisas velhas no sótão, encontrou uns papéis corroídos pelo tempo, escritos em italiano antigo e também numa caligrafia regular, da direita para a esquerda: pareciam ser o tão procurado caderno de Leonardo sobre a quadratura do círculo. Ficou espantado.

Imagine que o Manuel lhe pede a si que estude a possibilidade de a autoria dos papéis ser de Leonardo da Vinci.

Admita que, numa aula de Matemática B, aprendeu que a massa de carbono 14 (C_{14}), presente num artefacto desde a sua produção, é dada pela fórmula

$$y(t) = c\ e^{-0{,}000121\,t}$$

em que c é a massa original de C_{14}, em gramas, e t é o tempo, em anos, decorrido desde o momento da produção do artefacto.

Decidiu, por isso, recorrer a um laboratório científico especializado em análises de C_{14}, que o informou do seguinte: o manuscrito contém 96% da massa de C_{14} original, ou seja, designando por c a massa de C_{14} original, a massa de C_{14} que o manuscrito contém é de $0{,}96\ c$.

Com base nesta informação, redija um pequeno texto para o Manuel, no qual constem:

- a idade do papel (em número inteiro de anos);
- a data (em anos) em que terá sido fabricado;
- a conclusão quanto à possibilidade de Leonardo da Vinci ser o autor do manuscrito.

FIM

COTAÇÕES

1.		**30 pontos**
1.1.	12 pontos	
1.2.	18 pontos	
2.		**40 pontos**
2.1.	20 pontos	
2.2.	20 pontos	
3.		**40 pontos**
3.1.	20 pontos	
3.2.	20 pontos	
4.		**40 pontos**
4.1.	20 pontos	
4.2.	20 pontos	
5.		**30 pontos**
5.1.	10 pontos	
5.2.	20 pontos	
6.		**20 pontos**
TOTAL		**200 pontos**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\ r$ $(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{Diagonal\ maior \times Diagonal\ menor}{2}$

Trapézio: $\dfrac{Base\ maior + Base\ menor}{2} \times Altura$

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Sector circular: $\dfrac{\alpha\ r^2}{2}$ $(\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*$)$

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\ r\ g$ $(r$ – *raio da base;* g – *geratriz*$)$

Área de uma superfície esférica: $4\ \pi\ r^2$ $(r$ – *raio*$)$

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\ \pi\ r^3$ $(r$ – *raio*$)$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$