Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º/11.º Anos ou 11.º/12.º Anos de Escolaridade

Prova 835/1.ª Fase

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para a(s) obter.

A prova inclui, nas páginas 11 e 12, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

1. Nos processos eleitorais, a conversão do número de votos em mandatos pode ser feita utilizando métodos diferentes.

Segundo o método de Hamilton, a distribuição dos mandatos pelas listas concorrentes faz-se da seguinte forma:

- calcula-se o divisor padrão (DP), dividindo o número total de votos pelo número de mandatos da Assembleia de Freguesia;
- calcula-se a quota padrão (QP) para cada um dos concorrentes, dividindo o número de votos de cada concorrente pelo divisor padrão;
- atribui-se a cada concorrente um número de mandatos igual à parte inteira da quota padrão;
- caso ainda restem mandatos para distribuir, ordenam-se, por ordem decrescente, as partes decimais das várias quotas padrão e atribuem-se os mandatos que restam (um para cada concorrente) aos concorrentes cujas quotas padrão tenham partes decimais maiores;
- na atribuição do último mandato, se houver dois concorrentes com quotas padrão que apresentem a mesma parte decimal, atribui-se o último mandato ao concorrente com menor número de mandatos.

Em 25 de Novembro de 2007, ocorreram as eleições para a Assembleia de Freguesia de Monte da Azinha. Para o preenchimento dos nove lugares da referida Assembleia, concorreram cinco partidos, em listas separadas. Cada lugar corresponde a um mandato. Após o apuramento geral, os resultados foram os seguintes.

Partido	Número de votos
A	454
B	438
C	49
D	463
E	29

O António é um habitante dessa freguesia. Ele afirma que, no apuramento dos lugares a atribuir a cada partido, o resultado da distribuição dos nove lugares pelas listas concorrentes é o mesmo, quer se aplique o método de Hondt, quer se aplique o método de Hamilton.

Mostre que o António tem razão.

Na sua resposta deve:

- apresentar a distribuição dos 9 lugares aplicando o método de Hondt;
- apresentar a distribuição dos 9 lugares aplicando o método de Hamilton;
- apresentar a conclusão.

2. A associação de estudantes da Escola Secundária de Monte da Azinha decidiu aplicar o método da Contagem de Borda, para escolher o representante dos alunos da escola num fórum internacional sobre ciência. Concorreram quatro candidatos: a Ana, a Inês, o Nuno e o Pedro.

Segundo o método da Contagem de Borda, o apuramento do vencedor faz-se de acordo com os seguintes critérios e etapas:

- para que um voto possa ser considerado válido, cada eleitor vota em todos os candidatos, ordenando--os de acordo com as suas preferências;
- na ordenação final dos concorrentes, cada primeira preferência recebe tantos pontos quantos os candidatos em votação;
- cada segunda preferência recebe menos um ponto do que a primeira, e assim sucessivamente, recebendo a última preferência um ponto;
- o vencedor é o concorrente com maior número de pontos.

Foram apurados noventa e cinco votos válidos. Os resultados obtidos são os seguintes.

	25 votos	**40 votos**	**15 votos**	**10 votos**	**5 votos**
1.ª preferência	Nuno	Pedro	Nuno	Pedro	Pedro
2.ª preferência	Ana	Inês	Inês	Nuno	Nuno
3.ª preferência	Inês	Nuno	Ana	Ana	Inês
4.ª preferência	Pedro	Ana	Pedro	Inês	Ana

Determine a pontuação final de cada candidato, e indique o vencedor.

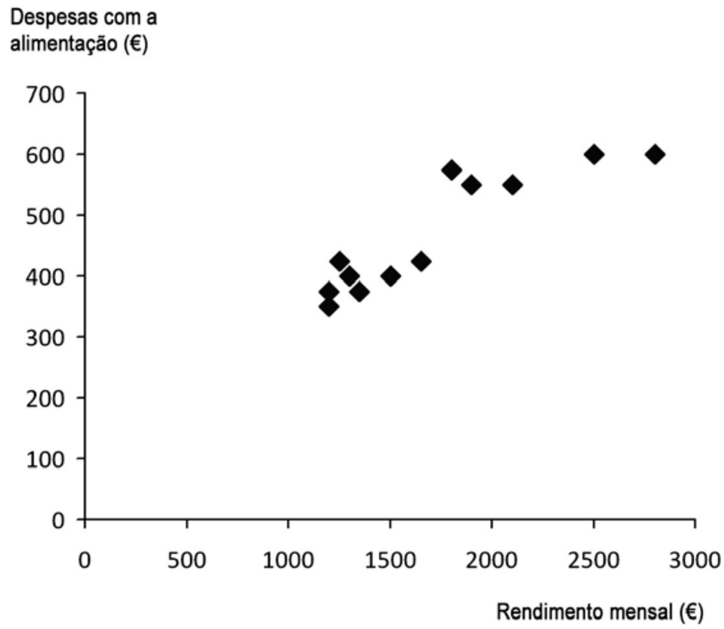
3. Na Escola Secundária de Monte da Azinha, verificou-se que 60% dos alunos de MACS são raparigas. Das raparigas, 25% são loiras, 50% têm cabelo castanho, e as restantes têm cabelo preto. Dos rapazes, $12{,}5\%$ são loiros, 50% têm cabelo castanho, e os restantes têm cabelo preto.

Escolheu-se, ao acaso, uma pessoa, de entre os alunos e as alunas de MACS, da Escola Secundária de Monte da Azinha.

3.1. Calcule a probabilidade de a pessoa escolhida ter cabelo loiro.

3.2. Calcule a probabilidade de a pessoa escolhida, na população indicada, ser rapariga, sabendo-se que tem cabelo preto.

4. As despesas de um agregado familiar com a alimentação dependem de muitos factores. Do ponto de vista sociológico, pode ser estudada a relação entre as despesas mensais com a alimentação e o rendimento mensal. Para conhecer esta relação, recolheram-se, aleatoriamente, os dados relativos a doze agregados familiares. Obtiveram-se os dados representados no diagrama de dispersão e constantes da tabela.



Agregado familiar	Rendimento mensal (€) x	Despesas com a alimentação (€) y
A	1250	425
B	2800	600
C	1900	550
D	1650	425
E	1300	400
F	1800	575
G	1200	375
H	2500	600
I	1350	375
J	2100	550
K	1200	350
L	1500	400

4.1. Admita que a associação entre as variáveis x e y é linear.

Classifique o tipo e o grau de associação entre as variáveis x e y, a partir da interpretação do valor do coeficiente de correlação.

Na sua resposta deve:

- apresentar o valor do coeficiente de correlação, com arredondamento às décimas;
- classificar o tipo e o grau de associação linear entre as variáveis;
- justificar a forma como classificou o tipo e o grau de associação linear entre as variáveis x e y.

4.2. Para responder aos itens seguintes, considere a equação $y = ax + b$, da recta de regressão linear das variáveis em estudo, e também os dados da tabela.

4.2.1. Determine os valores de a e b, **recorrendo à calculadora**.

Apresente os resultados com quatro casas decimais.

4.2.2. Faça a estimativa do valor das despesas mensais com a alimentação de um agregado familiar cujo rendimento mensal é de €1750.

Apresente o resultado, em euros, com arredondamento às unidades.

Caso não tenha respondido ao item **4.2.1.**, e somente nesse caso, considere $a = 0{,}1705$ e $b = 177{,}0151$.

4.3. Considere, agora, apenas os dados relativos ao rendimento mensal dos doze agregados familiares analisados no estudo.

O António pertence ao agregado familiar indicado na tabela pela **letra B**.

Suponha que o rendimento mensal do agregado familiar do António se alterou, passando a ser de $€8000$. Suponha ainda que os rendimentos mensais dos outros agregados familiares indicados na tabela não se alteraram.

Num pequeno texto, comente a afirmação seguinte, tomando como exemplo os dados relativos ao rendimento mensal dos doze agregados familiares, **antes** e **após** a alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António:

«Ao reduzir-se a informação relativa a um conjunto de dados, sob a forma de algumas medidas de localização, está a proceder-se a uma redução drástica dos dados, pelo que as medidas consideradas devem ser convenientemente escolhidas, de modo a representarem o melhor possível os dados que pretendem resumir.»

No seu texto deve incluir:

- os valores da média e da mediana do rendimento mensal dos doze agregados familiares, antes da alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António;
- os valores da média e da mediana do rendimento mensal dos doze agregados familiares, após a alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António;
- a indicação das medidas de localização que melhor representam os dados, antes e após a alteração do rendimento mensal do agregado familiar do António.

4.4. Ao ter conhecimento do estudo, o António procurou estimar o valor médio das despesas com a alimentação de todos os agregados familiares de Monte da Azinha. Analisou uma amostra aleatória de 50 agregados familiares de Monte da Azinha, tendo obtido uma média amostral de $€270$ e um desvio padrão amostral de $€100$.

Construa um intervalo com uma confiança de 95% para estimar o valor médio das despesas com a alimentação dos agregados familiares de Monte da Azinha.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

Apresente os extremos do intervalo, com arredondamento às centésimas.

5. O Manuel, irmão do António, terminou a licenciatura no último ano lectivo e anda à procura de emprego. Fez uma pesquisa de ofertas de emprego com início no mês de Janeiro de 2009 e chegou à conclusão de que estava interessado numa das seguintes situações.

Situação A: contrato de trabalho com vencimento constante no valor de €1280;

Situação B: contrato de trabalho com vencimento de €450 no primeiro mês e, nos meses seguintes, com um aumento de 10% por mês, apenas no primeiro ano. No 13.º mês e nos seguintes, vencimento igual ao vencimento do 12.º mês;

Situação C: contrato de trabalho com vencimento mensal, em euros, dado por $V_n = 800 \times 1{,}05^{n-1}$. V_n significa o vencimento no mês n (por exemplo, V_3 significa o vencimento no mês de Março, mês 3). A partir do início do segundo ano de contrato, vencimento constante e dado por V_{12}.

Na resposta a qualquer dos itens seguintes, **não contabilize** o pagamento de subsídios de férias, de Natal, ou de quaisquer outros.

5.1. Complete a tabela, relativamente à situação A e à situação B.

	Vencimento na situação A (€)	**Vencimento na situação B (€)**
1.º mês	$1280{,}00$	$450{,}00$
2.º mês		
3.º mês		
4.º mês		

Reproduza a tabela na folha de respostas.

Apresente os valores exactos.

5.2. Indique, justificando, qual das duas situações, situação A ou situação C, é a mais vantajosa para o Manuel, se o contrato tiver uma duração de cinco anos.

Na sua resposta deve:

- determinar o valor do vencimento do 12.º mês, nas situações A e C. Para a situação C utilize a fórmula dada;
- determinar a soma total dos vencimentos a receber desde o 1.º mês até ao último mês do 1.º ano, nas situações A e C;
- determinar a soma total dos vencimentos a receber desde o 1.º mês do 1.º ano até ao último mês do 5.º ano, nas situações A e C;
- concluir qual das duas situações é a mais vantajosa.

5.3. Por razões relacionadas com a proximidade da sua residência, o Manuel escolheu uma empresa que lhe ofereceu as condições previstas na situação A.

No primeiro mês, teve um vencimento de $€1280$, do qual foi deduzida a verba relativa ao IRS $(17\%$ desse valor$)$.

Indique o valor que o Manuel efectivamente recebeu no primeiro mês, supondo que não foi efectuado mais nenhum desconto.

FIM

COTAÇÕES

1.		**20 pontos**
2.		**20 pontos**
3.		**35 pontos**
3.1.	15 pontos	
3.2.	20 pontos	
4.		**65 pontos**
4.1.	10 pontos	
4.2.	15 pontos	
4.2.1. 10 pontos		
4.2.2. 5 pontos		
4.3.	25 pontos	
4.4.	15 pontos	
5.		**60 pontos**
5.1.	20 pontos	
5.2.	25 pontos	
5.3.	15 pontos	
TOTAL		**200 pontos**

Formulário

Teoria Matemática das Eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de restar um só mandato para distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido menor número de votos.

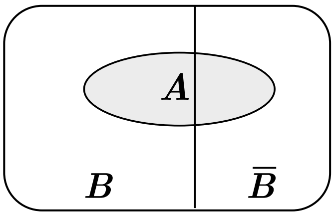
Modelos de Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices são de grau par.

Probabilidades

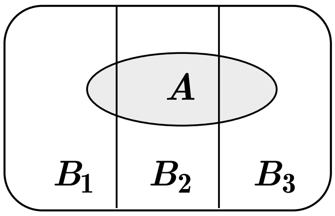
Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3.

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
σ – desvio padrão da variável
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
s – desvio padrão amostral
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra
$\hat{p}$ – proporção amostral
z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576