Ministério da Educação
GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL
EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática B

11.º/12.º Anos de Escolaridade

Prova 735/2.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2009

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para a(s) obter.

A prova inclui, na página 11, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

GRUPO I

No Casino ALEA, em *LA PLACE*, um dos jogos de sorte preferidos é a «Roleta das Somas».

A roleta está dividida em oito sectores iguais, numerados, como mostra o esquema da figura 1.

Cada jogador executa duas jogadas.

Cada jogada consiste em fazer girar a roleta e, quando esta parar, registar o número indicado.

Admita que, em cada jogada, cada sector tem a mesma probabilidade de sair.

A pontuação que cada jogador obtém é a **soma** dos números saídos nas duas jogadas.

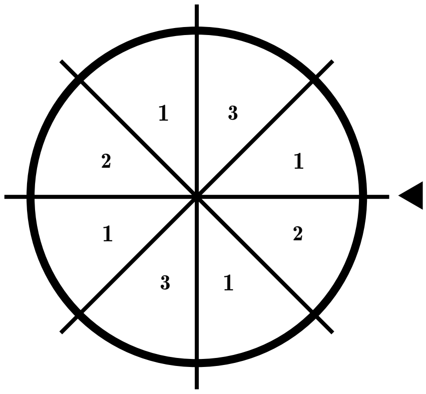

Fig. 1

1. Seja X a variável aleatória «Soma dos números saídos nas duas jogadas».

Complete a tabela de distribuição de probabilidades de X, apresentando os valores exactos de probabilidades, na forma de dízima.

Para responder, copie a tabela para a sua folha de prova e preencha-a.

x_i	2	3	4	5	6
$P(X=x_i)$					

2. Em cada noite de jogo no casino ALEA, a «Roleta das Somas» é usada dezenas de vezes.

Para efeitos de controlo pelas autoridades competentes, os serviços do casino registam o número total de jogadas realizadas em cada noite, especificando quantas vezes sai cada um dos três números diferentes registados nos sectores $(1,\ 2$ e $3)$. Este procedimento é utilizado, principalmente, para se verificar que a roleta não está viciada.

Numa certa noite, os serviços do casino registaram 820 jogadas efectuadas com a roleta. Na tabela seguinte, apresentam-se as frequências relativas correspondentes ao número de vezes que cada um dos três números diferentes saiu nas 820 jogadas.

Número	1	2	3
Frequência relativa	55%	20%	25%

Determine a média dos números saídos nas 820 jogadas efectuadas naquela noite.

GRUPO II

Na figura 2, está representado um quadrado $[ABCD]$, cujos lados têm comprimento ℓ. Em cada um dos lados do quadrado, assinalou-se o respectivo ponto médio.

Unindo os pontos médios, obteve-se o quadrado $[PQRS]$.

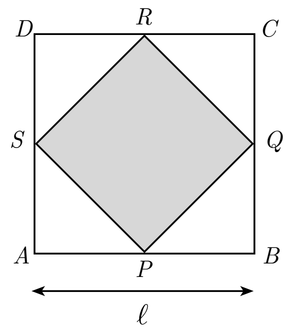

Fig. 2

1. Prove que a área do quadrado $[PQRS]$ é metade da área do quadrado $[ABCD]$, seja qual for o valor de ℓ.

Sugestão: Poder-lhe-á ser útil começar por decompor o quadrado $[ABCD]$ em quatro quadrados geometricamente iguais.

2. Um joalheiro criou uma colecção de peças numeradas (I, II, III, ...), com faces quadradas, de 4 centímetros de lado.

Na figura 3, que não está à escala, estão representados apenas os três primeiros exemplares dessa colecção.

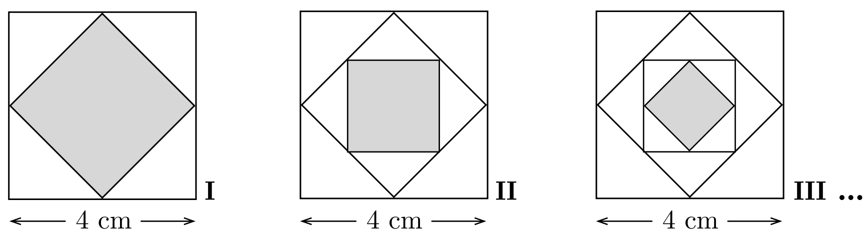

Fig. 3

- cada peça contém uma pedra preciosa, cuja face visível também tem a forma de um quadrado, representado pela **região sombreada**. Tal como a figura 3 sugere, a dimensão da pedra preciosa vai diminuindo ao longo da colecção;
- de cada peça para a seguinte, o joalheiro aplicou ao quadrado central o processo ilustrado na figura 2;
- a face visível da pedra preciosa, de menor dimensão, é um quadrado de $0{,}25\ \mathrm{cm}^2$ de área.

Considere a sequência das **áreas**, em cm^2, das faces visíveis das pedras preciosas utilizadas nesta colecção de peças.

Determine a **soma** das áreas das faces visíveis das pedras preciosas de toda a colecção.

Sugestão: Comece por mostrar que 8 é o primeiro termo da sequência referida.

GRUPO III

Numa vila, o presidente da Junta de Freguesia vai inaugurar um mural rectangular na praça principal. Nesse mural, será exposta uma tapeçaria.

No projecto, ilustrado na figura 4, o mural está representado pelo rectângulo maior, e a tapeçaria pelo rectângulo menor, sombreado; x representa a medida, em metros, de um dos lados do mural.

Cada um dos lados da tapeçaria ficará paralelo a dois dos lados do mural, com margens de $0{,}5\ \mathrm{m}$ e de $1\ \mathrm{m}$, como a figura ilustra.

O mural terá $26\ \mathrm{m}$ de perímetro.

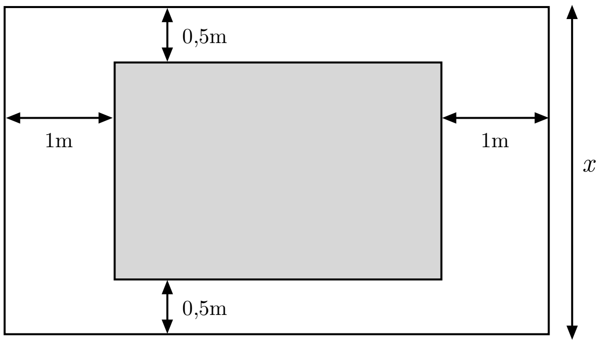

Fig. 4

1. Mostre que as medidas, em metros, de dois lados não paralelos da tapeçaria, expressas em função de x, com $x \in \left]1, 11\right[$, são dadas por $x - 1$ e $11 - x$.

2. Mostre que a **área da tapeçaria**, A, em metros quadrados, em função de x, é dada por

$$A(x) = -x^2 + 12x - 11 \;, \qquad x \in \left]1, 11\right[\,.$$

3. Determine o valor de x, com $x \in \left]1, 11\right[$, para o qual a área da tapeçaria é máxima.

GRUPO IV

O Tomás gosta muito de aviões e costuma consultar com regularidade o sítio da internet do Instituto Nacional de Estatística, onde se encontram publicados os dados referentes ao tráfego aéreo nos diversos aeroportos portugueses.

Ao analisar as tabelas de Dezembro de 2007, referentes ao «número de aeronaves aterradas/descoladas nos aeroportos nacionais por localização geográfica, tipo de tráfego e natureza do tráfego», o Tomás reparou que o 1 era, com muita frequência, o algarismo inicial de cada número. Por exemplo, o número de aviões aterrados num determinado aeroporto, nesse mês, foi de 157, número cujo algarismo inicial é 1.

Tal facto deixou o Tomás muito intrigado e curioso. Para investigar a situação, resolveu determinar a percentagem de vezes em que cada algarismo, de 1 a 9, aparecia como algarismo inicial dos números registados. Os resultados, apresentados no gráfico da figura 5, foram surpreendentes.

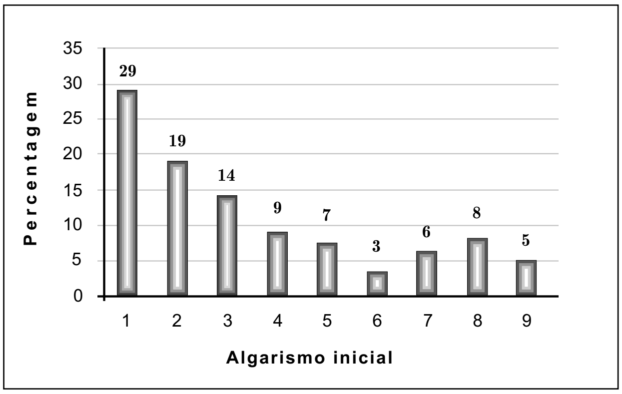

Fig. 5

1. Quando observou o gráfico, o Tomás considerou que uma função logarítmica era um bom modelo para esta distribuição. Depois de introduzir os dados nas listas da sua máquina calculadora, obteve, por regressão logarítmica, o modelo

$$P = 26{,}6723 - 10{,}9399 \times \ln(S)$$

no qual P representa a **percentagem** de ocorrência do algarismo inicial S, com $S \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, e $\ln$ o logaritmo de base e.

1.1. O gráfico de barras obtido sugere, por exemplo, que o algarismo 8 apresenta uma frequência relativa desajustada do modelo logarítmico.

Determine a diferença entre a percentagem observada no gráfico e a percentagem P, obtida por aplicação do modelo, com aproximação às décimas.

Em cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

1.2. Esta distribuição teve por base uma amostra de 216 dados.

Quantos **números** se iniciariam com o algarismo 1, de acordo com o modelo encontrado?

2. A distribuição das frequências do algarismo inicial de muitas colecções de números recolhidos da realidade, como dados fiscais e índices da Bolsa, é uma distribuição logarítmica.

Esta distribuição é conhecida por **Lei de Benford**:

$$P(n) = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

na qual $P(n)$ designa a probabilidade de n ser o algarismo inicial de um número com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, e $\log$ designa o logaritmo de base 10.

Admita que está perante uma colecção de números que segue a Lei de Benford.

Escolhe-se, ao acaso, um número dessa colecção. A probabilidade de ele começar por um certo algarismo é $0{,}058$ (valor arredondado às milésimas).

De que algarismo se trata?

GRUPO V

O Carlos costuma passar as suas férias de Verão no Algarve, na zona da Ria Formosa.

Num determinado dia de Agosto, o Carlos acompanhou um amigo seu, o António, na apanha do marisco. Para isso, foram de manhã cedo para um local adequado da ria, aproveitando a baixa-mar.

Admita que, nesse dia, o nível das águas do mar, M, em metros, registado pelo marégrafo local, foi dado, aproximadamente, por:

$$M\left(t\right) = 1{,}055\ \operatorname{sen}\left(0{,}507\ t + 0{,}916\right) + 1{,}908 \qquad \text{com} \qquad 0 \leq t \leq 24$$

Nesta expressão:

- a variável t representa o tempo, em horas, contado a partir das zero horas, desse dia;
- o argumento da função seno é medido em radianos.

1. O António sabia que, naquele local da ria, era possível efectuar a apanha de marisco enquanto o nível das águas não excedesse $1{,}3\,\mathrm{m}$.

Determine, recorrendo às capacidades da sua calculadora, o período de tempo da manhã em que foi possível efectuar a apanha do marisco.

Apresente os extremos desse período de tempo, em horas e minutos, com os minutos aproximados às unidades.

Apresente o(s) gráfico(s) em que se baseou para dar a resposta.

Nos cálculos intermédios, utilize, pelo menos, quatro casas decimais.

2. Nesse mesmo dia, um barco ficou encalhado na ria, cerca das $06\,\mathrm{h}\ 07\,\mathrm{min}$, quando o nível das águas do mar era de $1{,}1\ \mathrm{m}$.

No momento em que o barco foi desencalhado, o nível das águas do mar era de $2{,}2\ \mathrm{m}$.

Na figura 6, apresenta-se um esboço do gráfico da função M, anteriormente referida, no qual estão assinalados os pontos $P\,(6{,}11;\ 1{,}1)$ e $Q\,(23{,}53;\ 2{,}2)$.

O gráfico não está à escala.

Os valores $t = 6{,}11$ e $t = 23{,}53$ representam, com aproximação às centésimas da hora, respectivamente, o instante em que o barco ficou encalhado e o instante em que foi desencalhado.

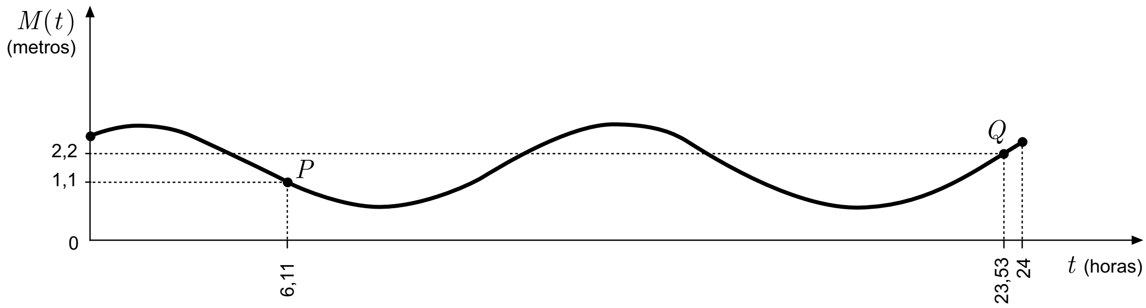

Fig. 6

Dias mais tarde, foi publicada, num jornal local, uma notícia relativa a este incidente. Da notícia publicada, apresenta-se o seguinte excerto:

> «Numa zona da ria Formosa, pertencente ao concelho de Olhão, ficou encalhada, desde as primeiras horas da manhã, uma pequena embarcação. Era já noite quando, com a ajuda de um rebocador, se conseguiu libertar o barco encalhado. Tinham passado, entretanto, cerca de **17 horas e 42 minutos**, desde o momento em que o barco ficou preso.
>
> No momento em que o barco foi desencalhado, o nível das águas do mar subia a uma taxa aproximada de **0,7 metros por hora**.
>
> Desde a última baixa-mar ocorrida horas antes, a maré já tinha subido cerca de **1,5 metros**, o que facilitou os trabalhos de resgate do barco.»

Elabore uma pequena composição em que refira a **correcção / incorrecção** de cada um dos três valores numéricos apresentados na notícia.

Recorra, para o efeito, à sua calculadora.

Nos cálculos intermédios, utilize, pelo menos, três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I		**30 pontos**
1.	15 pontos	
2.	15 pontos	
GRUPO II		**35 pontos**
1.	15 pontos	
2.	20 pontos	
GRUPO III		**45 pontos**
1.	15 pontos	
2.	10 pontos	
3.	20 pontos	
GRUPO IV		**50 pontos**
1.	30 pontos	
1.1. 15 pontos		
1.2. 15 pontos		
2.	20 pontos	
GRUPO V		**40 pontos**
1.	20 pontos	
2.	20 pontos	
TOTAL		**200 pontos**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro recto: $2\, \pi\, r\, g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\, \pi\, r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \dfrac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta, de valores x_i com probabilidades p_i, então

- média de X:

  $\mu = x_1\, p_1 + \ldots + x_n\, p_n$

- desvio padrão de X:

  $\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2\, p_1 + \ldots + (x_n - \mu)^2\, p_n}$

Se X é uma variável aleatória normal, de média μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$