# Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

**Prova 835/1.ª Fase** 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

**2010**

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para a(s) obter.

A prova inclui, nas páginas 11 e 12, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

**1.** No dia 11 de Outubro de 2009, realizaram-se, em Portugal, eleições autárquicas.

O território de um concelho constitui um único círculo eleitoral, para efeito de eleição dos órgãos autárquicos.

No círculo eleitoral de um dado concelho, concorreram à Câmara Municipal os partidos que constam na Tabela 1. Após o apuramento geral, os partidos concorrentes foram ordenados por número de votos obtidos, para se distribuírem os $7$ mandatos correspondentes aos $7$ vereadores a eleger.

**Tabela 1**

| Partidos | Número de votos |
|---|---|
| A | 7744 |
| B | 4918 |
| C | 1666 |
| D | 1572 |
| E | 308 |

A actual lei eleitoral prevê que a distribuição de mandatos seja feita, de forma proporcional, pelo método de Hondt.

Alguns movimentos partidários defendem que a distribuição de mandatos, para cada círculo eleitoral, deveria ser feita de forma directamente proporcional ao respectivo número de votos, com arredondamento às unidades. Por exemplo, ao partido $\mathrm{B}$ deveriam ser atribuídos $2$ mandatos, uma vez que $\dfrac{4918}{\text{número total de votos}} \times 7 \approx 2{,}124$ .

Verifique se os resultados deste concelho se modificariam com a aprovação da alteração à lei eleitoral proposta por esses movimentos partidários.

Na sua resposta, deve:

- distribuir os $7$ mandatos destinados à vereação da Câmara Municipal do concelho pelos partidos constantes na tabela, utilizando o método de Hondt;
- distribuir os $7$ mandatos destinados à vereação da Câmara Municipal do concelho pelos partidos constantes na tabela, de forma directamente proporcional ao respectivo número de votos;
- concluir a partir da comparação entre os dois resultados.

**2.** A Ana, a Berta, a Carla e a Daniela são as quatro herdeiras dos bens do senhor Francisco. Elas vão efectuar a partilha da herança deixada pelo senhor Francisco, herança essa constituída por um automóvel, um terreno e uma casa.

O método usado para a partilha é o seguinte:

- Primeira etapa: cada herdeira atribui um valor monetário a cada um dos bens da herança, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e registados, numa tabela, os valores das licitações de todas as herdeiras;
- Segunda etapa: determina-se o valor global atribuído, por cada herdeira, à herança e o valor que cada herdeira considera justo receber, designado por porção justa. A porção justa obtém-se, para cada herdeira, através do quociente entre a soma das licitações atribuídas por essa herdeira e o número de herdeiras;
- Terceira etapa: cada bem é atribuído à herdeira que mais o valoriza, e considera-se que ela recebe o valor que atribui ao respectivo bem. Se uma herdeira não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o «valor dos bens recebidos» por essa herdeira é zero;
- Quarta etapa: se o valor dos bens recebidos por uma herdeira for superior ou for inferior à porção justa por si determinada, então essa herdeira terá de pagar ou de receber a diferença, respectivamente;
- Quinta etapa (só é aplicada quando existe dinheiro em excesso): o excesso obtém-se subtraindo, do total do valor a pagar, o total do valor que as herdeiras têm a receber. Este excesso é dividido em partes iguais pelas herdeiras.

Na Tabela 2, encontram-se registados os valores monetários atribuídos, nas licitações secretas, por cada herdeira a cada um dos bens, o que corresponde à primeira etapa.

**Tabela 2**

| | ANA | BERTA | CARLA | DANIELA |
|---|---|---|---|---|
| Automóvel | €15 000 | €18 000 | €15 600 | €16 500 |
| Terreno | €33 000 | €20 000 | €27 000 | €30 000 |
| Casa | €117 000 | €150 000 | €120 000 | €180 000 |

Determine a partilha dos três bens, aplicando o método descrito, de forma que nenhuma herdeira possa ter razão para reclamar.

Na sua resposta, deve:

- calcular o valor global atribuído à herança por cada herdeira;
- determinar a porção justa de cada herdeira;
- atribuir os bens às herdeiras;
- apurar o valor a pagar ou a receber por cada herdeira;
- apurar o excesso, caso exista;
- dividir o excesso, caso exista, pelas herdeiras;
- indicar o valor total a receber por cada herdeira.

**3.** Num Serviço de Atendimento à Gripe (SAG), o número aproximado de casos confirmados de infecção pelo vírus H1N1, no dia $t$ do mês de Agosto de 2009, é dado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$A(t) = \frac{62{,}10}{1 + 25 \times e^{-0{,}797t}}$$

No mesmo SAG, o número aproximado de casos confirmados de infecção pelo vírus H1N1, no dia $t$ do mês de Setembro de 2009, é dado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$S(t) = 62{,}11 + \ln(1{,}5 + t)$$

Assim, por exemplo, o número aproximado, arredondado às unidades, de casos confirmados de infecção pelo vírus H1N1, no dia 3 de Agosto de 2009, é $19$, pois $A(3) \approx 18{,}88426$, e, no dia 4 de Setembro de 2009, é $64$, pois $S(4) \approx 63{,}81475$.

Nos três itens seguintes, pode recorrer à calculadora. Sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.). Sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto.

**3.1.** Determine o número aproximado, arredondado às unidades, de casos confirmados de infecção pelo vírus H1N1, no dia $18$ de Setembro, utilizando o modelo $S$.

**3.2.** A partir do modelo $A$, é possível afirmar que, num determinado dia do mês de Agosto, o número aproximado, com arredondamento às unidades, de casos confirmados de infecção pelo vírus H1N1 é $51$.

Determine esse dia.

**3.3.** No mês de Agosto e no mês de Setembro, o número aproximado de casos confirmados de infecção pelo vírus H1N1, arredondado às unidades, apresenta-se seguindo modelos matemáticos diferentes.

Num pequeno texto, analise as representações gráficas dos modelos $A$ e $S$.

Na sua resposta, deve:

- reproduzir os gráficos e descrever a forma como evoluiu o número aproximado de casos confirmados de infecção pelo vírus H1N1, em cada um dos meses referidos;
- apresentar as diferenças entre o número aproximado, arredondado às unidades, de casos confirmados de infecção pelo vírus H1N1 no início e no final de Agosto, e no início e no final de Setembro;
- comparar os resultados obtidos.

**4.** A empresa Silva-Filhos dedica-se à limpeza de estradas. A empresa está sediada no distrito de Viseu.

**4.1.** Na Figura 1, encontra-se o grafo que serve de modelo ao circuito utilizado pela empresa ao efectuar a limpeza das estradas.

Cada vértice do grafo representa uma localidade, e cada aresta representa uma estrada que liga duas localidades.

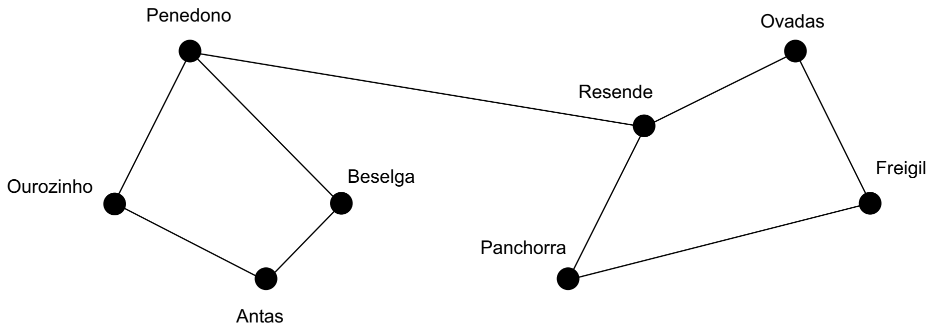



Figura 1

Considere a afirmação:

«Não é possível limpar todas as estradas representadas no grafo da Figura 1, percorrendo cada estrada uma e uma só vez, se o camião de limpeza partir de Beselga e regressar a Beselga. Mas, é possível alterar esta situação.»

Justifique a veracidade da afirmação anterior.

Reproduza o grafo da Figura 1, na folha de respostas, e acrescente-lhe uma aresta de modo que o grafo obtido represente um modelo a partir do qual seja possível limpar todas as estradas, percorrer cada estrada uma e uma só vez, partindo de Beselga e regressando a Beselga.

**4.2.** Considerando o conjunto das facturas da Silva-Filhos, o gerente da empresa afirma que o valor médio do valor de uma factura da empresa é de €$800$.

Para analisar a veracidade da afirmação, o contabilista da Silva-Filhos recolheu uma amostra aleatória de $500$ facturas e verificou que a média da amostra é de €$830$ e que o desvio padrão amostral é de €$220$.

Haverá razão para duvidar da afirmação do gerente da Silva-Filhos?

Justifique a sua resposta, construindo um intervalo de confiança de $99\%$ para o valor médio do valor de uma factura da empresa Silva-Filhos.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Apresente os extremos do intervalo, com arredondamento às centésimas.

**5.** A Joana e a Maria, irmãs gémeas, são alunas da Escola Secundária de Mornas e frequentam a mesma turma.

O professor de Educação Física da turma das gémeas pediu aos alunos a elaboração de um trabalho sobre a prática de desporto.

A Joana é uma praticante de Voleibol, e a Maria é uma praticante de Ginástica Rítmica. Por isso, a Joana e a Maria optaram por questionar todos os alunos da Escola Secundária de Mornas sobre a aceitação das modalidades Voleibol e Ginástica Rítmica naquela escola.

O modelo de questionário utilizado para recolher os dados está representado na Figura 2.

ESCOLA SECUNDÁRIA DE MORNAS

**Disciplina:** Educação Física

Qual é a tua modalidade desportiva preferida? Assinala-a com $\times$ no ☐

**Ginástica Rítmica** ................................................ ☐

**Voleibol** .............................................................. ☐

**Outra** ........... (Indica-a:_______________) ......... ☐

Obrigado!

Figura 2

As gémeas recolheram as respostas dos $632$ alunos da escola, incluindo as delas próprias.

Todos os alunos responderam ao questionário e colocaram, pelo menos, um «$\times$».

Ao contabilizar os resultados, a Joana contou $125$ preferências para «Ginástica Rítmica», $156$ para «Voleibol» e $474$ para «Outra» e, ao somar estes valores, pensou que a contagem não estava certa.

A Maria resolveu verificar a contagem e respondeu:

«Está certo! Porque uns alunos colocaram dois “$\times$”, um na “Ginástica Rítmica” e outro no “Voleibol”. Verifico, também, que os alunos que escolheram a opção “Outra” só colocaram um “$\times$”.»

**5.1.** Determine quantos alunos colocaram apenas um «$\times$» na resposta ao questionário.

**Sugestão:** elabore um diagrama de Venn com os resultados apurados pelas gémeas.

**5.2.** Escolheu-se, ao acaso, um aluno da Escola Secundária de Mornas.

Calcule a probabilidade de o aluno escolhido preferir, pelo menos, uma das modalidades desportivas apresentadas, «Voleibol» ou «Ginástica Rítmica».

Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

**5.3.** Escolheu-se, ao acaso, um aluno da Escola Secundária de Mornas.

Calcule a probabilidade de o aluno escolhido preferir «Ginástica Rítmica», sabendo que não escolheu «Outra» quando respondeu ao questionário.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às centésimas.

**5.4.** Leia, atentamente, a informação:

«Num conjunto de dados, se adicionarmos uma constante $k$ ao valor de cada um dos dados, obtêm--se novos valores. A média dos novos valores é igual à soma da média dos dados originais com a constante $k$.»

Considere, agora, o problema:

Para a viagem de finalistas, a Joana, a Maria e o Henrique precisam que a média das quantias depositadas seja de $€1100$. A Joana, a Maria e o Henrique depositaram, numa instituição bancária, as suas poupanças, de $€720$, $€800$ e $€910$, respectivamente. Para conseguirem uma taxa de juro mais elevada, o pai do Henrique decidiu ajudá-los, aumentando o capital depositado por cada um dos três jovens, dando o mesmo valor a cada um.

Determine o valor que o pai do Henrique deve oferecer, a cada um dos jovens, para que a média das quantias depositadas se fixe em $€1100$.

Para resolver o problema, pode ser útil usar o conhecimento que consta da informação inicial.

**FIM**

# COTAÇÕES

| | | |
|---|---|---|
| **1.** | | **20 pontos** |
| **2.** | | **25 pontos** |
| **3.** | | **45 pontos** |
| **3.1.** | 10 pontos | |
| **3.2.** | 15 pontos | |
| **3.3.** | 20 pontos | |
| **4.** | | **35 pontos** |
| **4.1.** | 15 pontos | |
| **4.2.** | 20 pontos | |
| **5.** | | **75 pontos** |
| **5.1.** | 15 pontos | |
| **5.2.** | 20 pontos | |
| **5.3.** | 20 pontos | |
| **5.4.** | 20 pontos | |
| **TOTAL** | | **200 pontos** |

# Formulário

## Teoria Matemática das Eleições

### Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por $1$, $2$, $3$, $4$, $5$, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral respectivo; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de restar um só mandato para distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido menor número de votos.

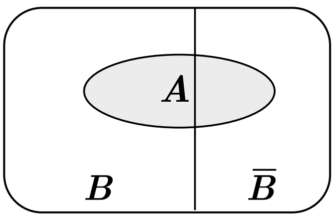
## Modelos de Grafos

### Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

## Probabilidades

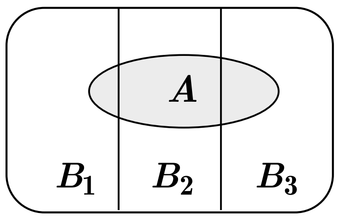
### Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes




$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$




$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo $k$ tomar os valores 1, 2 ou 3.

# Formulário (cont.)

## Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio $\mu$ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

$n$ – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
$\sigma$ – desvio padrão da variável
$z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio $\mu$ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\bar{x} - z\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

$n$ – dimensão da amostra
$\bar{x}$ – média amostral
$s$ – desvio padrão amostral
$z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção $p$, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

$n$ – dimensão da amostra
$\hat{p}$ – proporção amostral
$z$ – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de $z$ para os níveis de confiança mais usuais.

| Nível de confiança | 90% | 95% | 99% |
|---|---|---|---|
| $z$ | 1,645 | 1,960 | 2,576 |