Ministério da Educação
GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL
EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO
Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/1.ª Fase 11 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas de pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 11, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

GRUPO I

A gerência de um hotel de uma zona turística encomendou a um artista plástico um painel decorativo.

O painel será composto por uma sequência de dez telas quadradas, espaçadas entre si, todas com 12 decímetros de lado e com diferentes pinturas.

A Figura 1 representa as três primeiras telas dessa sequência, ordenadas da esquerda para a direita.

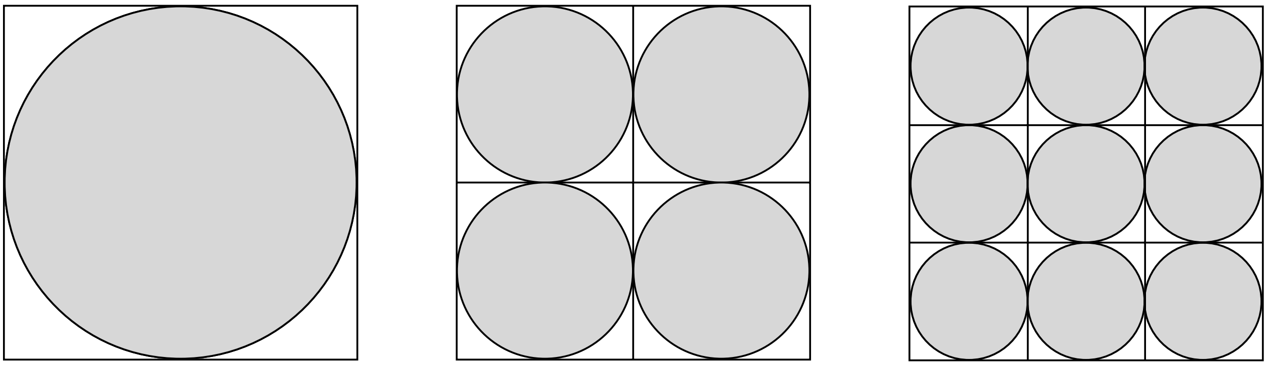

Figura 1

O artista pintou as telas de acordo com o seguinte processo:

- na primeira tela, pintou o círculo inscrito;
- dividiu a segunda tela em quatro quadrados geometricamente iguais, nos quais pintou os quatro círculos inscritos, tal como se vê na figura;
- dividiu a terceira tela em nove quadrados geometricamente iguais, nos quais pintou os nove círculos inscritos, tal como se vê na figura;
- e assim sucessivamente, até à décima tela.

1. Mostre que a área do círculo pintado na primeira tela é igual à soma das áreas dos círculos pintados na segunda tela.

2. Determine o número de círculos pintados na décima tela do painel.

3. O artista vai decorar, com fio dourado, as dez telas que compõem o painel.

Em cada uma das dez telas, o artista aplicará o fio, percorrendo todos os lados dos quadrados nos quais pintou os círculos inscritos. A aplicação será feita sem qualquer sobreposição do fio.

Quantos metros de fio dourado terá de aplicar o artista?

GRUPO II

Numa unidade de turismo de habitação, existem três reservatórios de água: um em forma de cilindro e dois em forma de cone, todos com a mesma altura e com bases iguais.

Houve necessidade de despejar o reservatório cilíndrico, para se proceder a uma reparação.

A Figura 2 representa o reservatório cilíndrico, cheio de água.

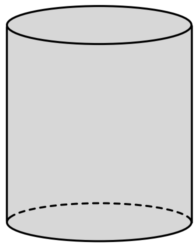

Figura 2

Parte dessa água foi despejada nos dois reservatórios em forma de cone, que ficaram cheios.

Na Figura 3, estão representados esses reservatórios, cheios de água, e o reservatório cilíndrico, com a água restante.

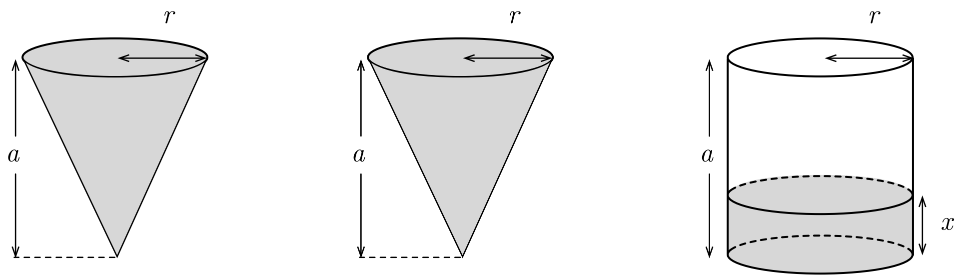

Figura 3

Considere que:

- a é a altura, em metros, de cada um dos reservatórios;
- r é o raio, em metros, da(s) base(s) de cada um dos reservatórios;
- x é a altura, em metros, da água que ficou no reservatório cilíndrico;
- a espessura do material de que são feitos os reservatórios é desprezável.

1. Mostre que a relação entre a altura da água que ficou no reservatório cilíndrico (x) e a altura de cada um dos reservatórios (a) é dada por $x = \dfrac{a}{3}$

2. Posteriormente, a água que restava no reservatório cilíndrico, depois de se terem enchido os dois reservatórios cónicos, foi sendo retirada, até aquele ficar vazio.

Admita que a altura h, em metros, da água que restava no reservatório cilíndrico, t horas após ter sido começada a retirar até o reservatório ficar completamente vazio, é dada por:

$$h(t) = \frac{5t - 16}{t - 10}$$

2.1. Calcule a altura, em metros, do reservatório cilíndrico.

Na sua resolução, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- calcular $h(0)$
- relacionar $h(0)$ com x
- utilizar a igualdade $x = \frac{a}{3}$
- calcular a altura pedida.

2.2. Quanto tempo demorou o reservatório cilíndrico a esvaziar, a partir do momento em que se começou a retirar a água que ficara nesse reservatório, depois de se terem enchido os dois reservatórios cónicos?

Apresente o resultado em horas e minutos.

2.3. Relativamente à situação descrita, fez-se a seguinte afirmação:

«Durante o período de esvaziamento do reservatório cilíndrico, existe um certo intervalo de tempo, no qual a taxa de variação média da função h tem um valor positivo.»

Esta afirmação é verdadeira? Justifique a sua resposta.

GRUPO III

O Diogo é estudante de um curso de Gestão Hoteleira. Para uma das disciplinas do curso, realizou dois trabalhos. O primeiro trabalho consistiu na elaboração de um programa turístico. O segundo trabalho incluiu a análise de vários indicadores sociológicos relativos a alguns países da União Europeia.

1. O programa turístico elaborado pelo Diogo incluía uma visita a Lisboa e um passeio de barco no rio Tejo. A fim de aproveitar o tempo disponível para as diversas actividades, o Diogo teve em conta que a duração da exposição solar varia ao longo do ano.

Com base em dados do Observatório Astronómico de Lisboa, obteve os modelos que dão, aproximadamente, a hora a que o Sol nasceu, N, e a hora a que o Sol se pôs, P, em Lisboa, em cada dia do ano de 2009:

$$N(x) = 6{,}5987 + 1{,}3424 \ \operatorname{sen}(0{,}0161x + 1{,}8287)$$

$$P(x) = 18{,}6745 + 1{,}3875 \ \operatorname{sen}(0{,}0164x - 1{,}1955)$$

Considere que:

- x representa a ordem do dia do ano, sendo $x \in \{1, 2, ..., 365\}$
- o argumento da função seno está em radianos
- a duração da exposição solar é dada por $P(x) - N(x)$

1.1. Determine a duração da exposição solar no último dia do ano de 2009, em Lisboa, de acordo com os modelos apresentados.

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, mantenha, pelo menos, três casas decimais.

1.2. Determine o número de dias do ano de 2009 nos quais, de acordo com os modelos apresentados, a duração da exposição solar, em Lisboa, foi superior a 10 horas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, mantenha, pelo menos, uma casa decimal.

1.3. Qual foi, em 2009, a ordem do dia do ano com a maior duração de exposição solar, em Lisboa?

Resolva o problema, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, mantenha, pelo menos, quatro casas decimais.

2. Para a elaboração do segundo trabalho, o Diogo recolheu diversos dados estatísticos e procedeu à realização de um inquérito a turistas que visitaram Portugal.

2.1. O Diogo consultou os registos referentes à esperança média de vida à nascença, para homens e mulheres de países da União Europeia.

Organizou esses registos numa tabela, que se apresenta a seguir, na qual x designa o número médio de anos de vida esperados à nascença para as mulheres e y designa o número médio de anos de vida esperados à nascença para os homens.

Esperança média de vida à nascença para homens e mulheres

PAÍSES	**MULHERES** (x)	**HOMENS** (y)
Portugal	$81{,}7$	$75{,}5$
Espanha	$85{,}0$	$78{,}9$
França	$84{,}3$	$77{,}5$
Irlanda	$81{,}6$	$76{,}8$
Reino Unido	$81{,}7$	$77{,}6$
Bélgica	$83{,}5$	$77{,}5$
Holanda	$82{,}3$	$78{,}3$
Alemanha	$82{,}4$	$77{,}2$
Itália	$84{,}1$	$78{,}8$
Grécia	$82{,}5$	$77{,}5$

Fontes: INE e Eurostat

O Diogo não registou na tabela os valores referentes a alguns países da União Europeia, como, por exemplo, os referentes à Áustria.

Admita que os valores da esperança média de vida à nascença para homens e mulheres referentes à Áustria seguem o modelo de regressão linear obtido a partir dos dados da tabela.

Estime o valor da esperança média de vida à nascença de um homem austríaco, sabendo que a esperança média de vida à nascença de uma mulher austríaca é $83{,}0$ anos.

Apresente os valores dos parâmetros da equação da recta de regressão linear de y sobre x com, pelo menos, seis casas decimais.

Apresente o resultado final arredondado às décimas.

2.2. O Diogo recolheu, através do inquérito que realizou, informação sobre alguns indicadores socioeconómicos de turistas que visitaram Portugal.

A partir da informação obtida, concluiu que, no grupo de turistas que responderam ao inquérito, o valor do vencimento mensal individual auferido, em euros, seguia, aproximadamente, a distribuição normal, $N(2400,\, 300)$, de média $\mu = 2400$ e desvio padrão $\sigma = 300$

Admita que se selecciona, ao acaso, um elemento do referido grupo de turistas.

Será mais provável que o valor do seu vencimento mensal individual seja superior a 2900 euros ou que seja inferior a 2000 euros? Justifique.

Se recorrer à sua calculadora, apresente cada valor obtido arredondado às centésimas.

GRUPO IV

Uma equipa de biólogos estuda, desde o início do ano de 2000, a evolução do número de elementos das populações de milhafres e de esquilos existentes numa Reserva Natural, onde se desenvolvem actividades de ecoturismo.

De acordo com os estudos efectuados, sabe-se que:

- o número de milhafres tem vindo a aumentar ao longo do tempo, embora lentamente, registando-se, na actualidade, um número ligeiramente inferior às cinco centenas de efectivos;
- o número de esquilos tem vindo a diminuir significativamente ao longo do tempo, registando-se, actualmente, um número de elementos inferior a meia centena de efectivos, o que coloca em risco a sobrevivência desta espécie na Reserva.

Sejam M e E as funções que dão, respectivamente, o número aproximado, em centenas, de milhafres e de esquilos, x meses após o início do ano de 2000, sendo $x \geq 0$

Em cada uma das quatro opções seguintes, apresenta-se uma expressão para definir a função M e outra para definir a função E, sendo $x \geq 0$

A) $M(x) = 0{,}8 + 7 \times 1{,}03^{-x}$; $E(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{\ln(2{,}5)}$

B) $M(x) = \dfrac{5}{1 + 6 \times e^{-0{,}05x}}$; $E(x) = 0{,}8 + 7 \times 1{,}03^{-x}$

C) $M(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{\ln(2{,}5)}$; $E(x) = 9 \times 1{,}03^{-x}$

D) $M(x) = \dfrac{5}{1 + 6 \times e^{-0{,}05x}}$; $E(x) = 9 \times 1{,}03^{-x}$

Apenas a opção **D)** está correcta, de acordo com os estudos efectuados.

Numa pequena composição, apresente, para cada uma das outras três opções, uma razão que justifique a sua rejeição, com base em propriedades das funções definidas pelas expressões apresentadas em cada uma dessas opções.

Nota – Poderá ser-lhe útil recorrer às capacidades gráficas da sua calculadora. Se o fizer, deve reproduzir, na sua folha de prova, o(s) gráfico(s) obtido(s).

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	15 pontos
2.	10 pontos
3.	15 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
2.3.	10 pontos
	55 pontos

GRUPO III

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	20 pontos
1.3.	20 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
	85 pontos

GRUPO IV

	20 pontos
	20 pontos

TOTAL .... **200 pontos**

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango:

$$\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$$

Trapézio:

$$\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$$

Polígono regular:

Semiperímetro × *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone:
$\pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica:
$4 \pi r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro recto:
$2 \pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta, de valores x_i com probabilidades p_i, então:

- média de X:

$$\mu = p_1 x_1 + ... + p_n x_n$$

- desvio padrão de X:

$$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + ... + p_n(x_n - \mu)^2}$$

Se X é uma variável aleatória normal, de média μ e desvio padrão σ, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$