Ministério da Educação

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de Março

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 835/1.ª Fase

13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2011

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efectuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma recta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para a(s) obter.

A prova inclui, nas páginas 4 e 5, o Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Teoria Matemática das Eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de restar um só mandato para distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

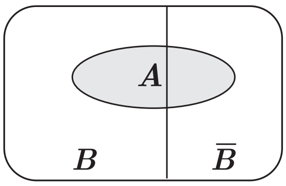
Modelos de Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

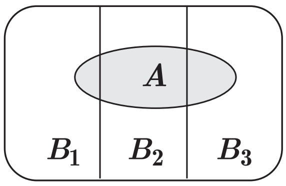
Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3.

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável.

$$\left]\overline{x} - z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\overline{x} - z\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{x} + z\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30.

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais.

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	$1{,}645$	$1{,}960$	$2{,}576$

1. No dia 27 de Setembro de 2009, realizaram-se, em Portugal, eleições para a Assembleia da República.

Na Tabela 1, estão indicados o número de votos validamente expressos e o número de mandatos distribuídos pelo método de Hondt, obtidos num certo círculo eleitoral por cada um dos cinco partidos mais votados nas referidas eleições. Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Tabela 1

Partido	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**
Número de votos	80 676	74 745	28 867	13 971	6148
Número de mandatos	4	4	1	0	0

1.1. O presidente do Partido C considera que o resultado da distribuição dos nove mandatos se alteraria caso o seu partido se tivesse coligado ou com o Partido D ou com o Partido E.

Admita que, em cada uma dessas coligações, o número de votos obtido pela coligação era igual à soma dos números de votos validamente expressos nos partidos que formavam a coligação, e que o número de votos dos outros partidos não sofria alteração.

Averigúe se existe fundamento na consideração do presidente do Partido C, aplicando o método de Hondt nos dois casos: C coligado com D e C coligado com E.

Apresente os quocientes do método de Hondt arredondados com uma casa decimal.

1.2. Um comentador televisivo afirma que a distribuição de mandatos que consta da Tabela 1 seria diferente se os nove mandatos fossem distribuídos pelo método de Webster.

Segundo o método de Webster, a distribuição de mandatos faz-se da forma seguinte:

- calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de votos pelo número total de mandatos;
- calcula-se a quota padrão para cada um dos partidos, dividindo-se o número de votos de cada partido pelo divisor padrão;
- se a parte decimal da quota padrão for menor que $0{,}5$, atribui-se a cada partido uma quota arredondada igual ao maior número inteiro menor que a quota padrão (por exemplo, se a quota padrão for igual a $6{,}452$, a quota arredondada é 6); se a parte decimal da quota padrão for maior que ou igual a $0{,}5$, atribui-se a cada partido uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor que a quota padrão (por exemplo, se a quota padrão for igual a $6{,}501$, a quota arredondada é 7);
- caso a soma das quotas padrão arredondadas seja igual à soma dos mandatos a distribuir, o método dá-se por finalizado, e assume-se que o número de mandatos para cada partido é igual à quota padrão arredondada; caso a soma das quotas padrão arredondadas seja diferente do número de mandatos a distribuir, é necessário encontrar um divisor modificado, substituto do divisor padrão, de modo a calcular a quota modificada de cada partido;
- repetem-se as três etapas anteriores até se obter a soma das quotas padrão modificadas igual ao número de mandatos a distribuir.

Mostre que o comentador televisivo tem razão, aplicando o método de Webster.

Apresente o divisor padrão e as quotas padrão arredondadas com três casas decimais.

2. Um economista estudou, durante 24 meses, o número de desempregados inscritos numa delegação do Instituto do Emprego e Formação Profissional (IEFP). Concluiu que o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, no início do estudo e no final de cada mês, t, é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$P(t) = \frac{5000}{2 + 23\, e^{-0{,}8\,t}} \qquad t = 0,\, 1,\, \ldots,\, 24$$

Considera-se $t = 0$ como o início do estudo. Assim, por exemplo, o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, no início do estudo, é 200, e o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, no final do quarto mês após o início do estudo, é 1702, pois $P(4) \approx 1702{,}1099$.

2.1. Determine, a partir do modelo P, ao fim de quantos meses após o início do estudo o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP é 2453.

2.2. Ao longo dos 24 meses em que decorreu o estudo, o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP não foi constante.

Num pequeno texto, analise a evolução do número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, com base na representação gráfica do modelo P.

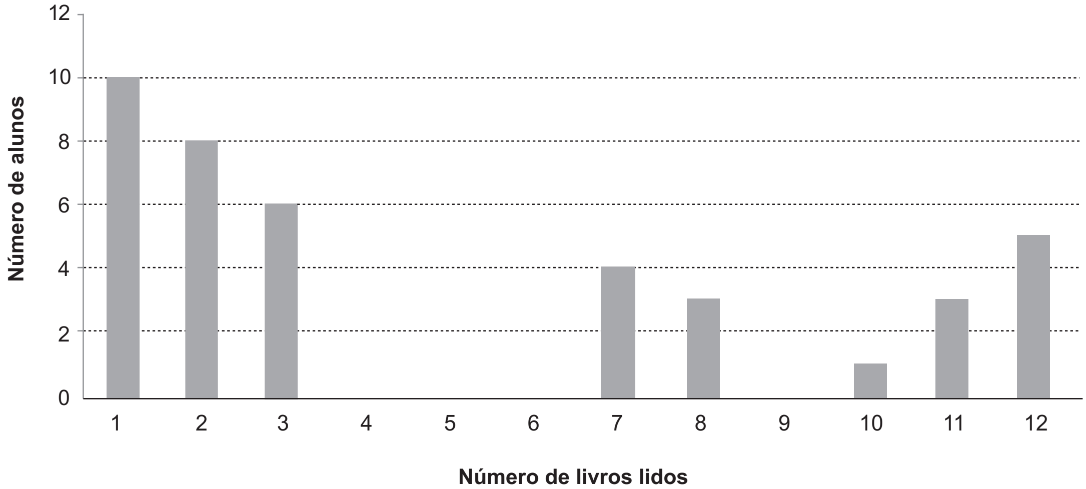
Na sua resposta, deve:

- reproduzir, na folha de respostas, o gráfico visualizado na calculadora;
- reproduzir, na folha de respostas, a janela de visualização utilizada;
- indicar o número máximo de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, nos 24 meses em que decorreu o estudo;
- apresentar a diferença entre os números de desempregados inscritos no início e no final do estudo;
- descrever a forma como evoluiu o número de desempregados inscritos nessa delegação do IEFP, nos 24 meses em que decorreu o estudo.

3. Num questionário, aplicado a 40 alunos de uma escola, sobre o número de livros lidos por aluno, nas férias de Verão, obtiveram-se os resultados que se encontram organizados no Gráfico 1.

Gráfico 1

Número de livros lidos por aluno, nas férias de Verão



3.1. A média é uma medida de localização do centro da distribuição dos dados.

Justifique o facto de a média, nesta amostra, não ser um bom indicador do *número de livros lidos por aluno*, nas férias de Verão.

Na sua resposta, deve:

- apresentar a média, arredondada às unidades, do *número de livros lidos por aluno*, nas férias de Verão;
- relacionar a média do *número de livros lidos por aluno*, nas férias de Verão, com a distribuição dos dados apresentada no Gráfico 1.

3.2. O diagrama de extremos e quartis também dá informação relevante sobre a localização do centro da amostra, bem como sobre a variabilidade e a simetria da mesma.

Descreva essa informação, depois de representar os dados do Gráfico 1 num diagrama de extremos e quartis.

Na sua resposta, deve:

- indicar os valores dos extremos, do 1.º quartil, do 3.º quartil e da mediana;
- apresentar o diagrama de extremos e quartis;
- referir a forma como os dados se distribuem quanto à variabilidade;
- referir a forma como os dados se distribuem quanto à simetria.

3.3. Os 40 alunos que responderam ao questionário foram envolvidos num projecto da escola destinado à promoção de hábitos de leitura.

Pretende-se que, concluído o projecto, nas próximas férias de Verão, cada um dos alunos envolvidos aumente em 1 o número de livros lidos.

Explique as repercussões desse aumento na média e na mediana do *número de livros lidos por aluno*, nas férias de Verão.

3.4. O Manuel leva três livros para ler nas férias de Verão, dois dos quais são de ficção científica e um é de ciências.

A sequência pela qual estes três livros vão ser lidos é aleatória, os livros não podem ser lidos mais do que uma vez, e nenhum livro será lido em simultâneo com outro.

Determine a probabilidade de os dois livros de ficção científica serem lidos um a seguir ao outro.

Apresente o resultado sob a forma de fracção irredutível.

4. Na gráfica SOS-Livros, realizou-se um estudo para conhecer a percentagem diária de livros produzidos com defeito. Para isso, recolheu-se, num dia seleccionado ao acaso, uma amostra aleatória de 500 livros produzidos na gráfica SOS-Livros e contou-se o número de livros com defeito nessa amostra. Obteve-se o valor de 8.

Construa um intervalo de confiança de 95% para a proporção de livros produzidos com defeito, diariamente, na gráfica SOS-Livros.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, seis casas decimais.

Apresente os extremos do intervalo arredondados com três casas decimais.

5. Na Figura 1, encontra-se o grafo que serve de modelo aos percursos utilizados pela RecSol, uma empresa de recolha de resíduos sólidos.

Cada vértice do grafo representa um local de recolha de resíduos sólidos, e cada aresta representa uma estrada que liga dois desses locais.

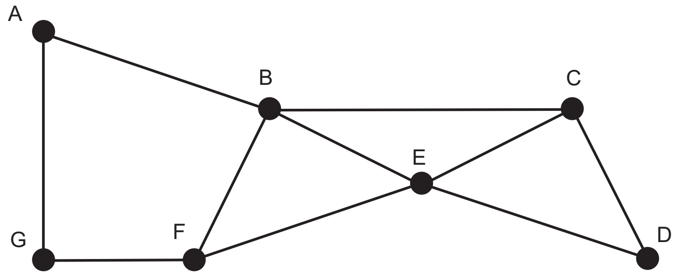


Figura 1

Na Tabela 2, encontram-se registadas as distâncias mínimas, em metros, entre cada dois locais de recolha de resíduos sólidos, representados pelos vértices do grafo da Figura 1, quando se percorrem as estradas representadas pelas arestas do mesmo grafo.

Tabela 2

	A	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**	**G**
A	—	1253	—	—	—	—	1248
B	—	—	1421	—	712	938	—
C	—	—	—	911	941	—	—
D	—	—	—	—	1001	—	—
E	—	—	—	—	—	1198	—
F	—	—	—	—	—	—	832
G	—	—	—	—	—	—	—

5.1. O António, um motorista da empresa RecSol, quer verificar se existem resíduos abandonados ao longo das estradas. Pretende partir do local representado pela letra A, percorrer todas as estradas, sem as repetir, e regressar ao mesmo local.

Podem todas as pretensões do António ser satisfeitas, em simultâneo?

Justifique a sua resposta.

5.2. A RecSol vai ligar todos os locais de recolha de resíduos sólidos com um cabo de fibra óptica, utilizando algumas das estradas representadas no grafo da Figura 1.

De modo a usar a menor extensão de cabo de fibra óptica, a empresa contactou dois especialistas em instalação de fibra óptica, o João e o José.

O João afirma, sem recurso a nenhum método, que a ligação que requer menos cabo é $\{(A,B),(F,G),(B,F),(B,E),(C,E),(C,D)\}$

O José propõe uma ligação apoiando-se no uso do algoritmo seguinte.

Algoritmo

Passo 1: Escolhem-se as duas arestas com o menor valor de distância.

Passo 2: Escolhe-se a aresta seguinte com o menor valor de distância, desde que essa aresta não feche um circuito.

Passo 3: Repete-se o ponto anterior até que todos os vértices façam parte da árvore, tendo em conta as regras seguintes:

- se houver empate na escolha de arestas, selecciona-se a aresta aleatoriamente;
- se a aresta a escolher fechar um circuito, essa aresta não deve ser considerada.

Indique qual das duas propostas deve escolher a empresa, de modo a usar a menor extensão de cabo de fibra óptica.

Na sua resposta, deve:

- determinar o número de metros da proposta do João;
- aplicar ao grafo da Figura 1 o algoritmo proposto pelo José;
- determinar o número de metros da proposta do José;
- apresentar uma conclusão sobre a escolha da empresa.

5.3. Em 2009, a RecSol transportou $145\,000$ objectos, $20\,000$ dos quais provenientes de recolha selectiva, $80\,000$ provenientes de limpeza de florestas e $45\,000$ provenientes de recolha de lixo doméstico.

Dos objectos provenientes de recolha selectiva, 96% são electrodomésticos; dos objectos provenientes de limpeza de florestas, 24% são electrodomésticos; e dos objectos provenientes de recolha de lixo doméstico, 36% são electrodomésticos.

Escolheu-se, ao acaso, um objecto transportado pela RecSol, em 2009.

Determine a probabilidade de o objecto escolhido ser proveniente de recolha selectiva, sabendo que é um electrodoméstico.

Apresente o resultado sob a forma de fracção irredutível.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

1.		
1.1.	20 pontos	
1.2.	20 pontos	
		40 pontos
2.		
2.1.	10 pontos	
2.2.	20 pontos	
		30 pontos
3.		
3.1.	15 pontos	
3.2.	20 pontos	
3.3.	15 pontos	
3.4.	15 pontos	
		65 pontos
4.	15 pontos	
		15 pontos
5.		
5.1.	20 pontos	
5.2.	10 pontos	
5.3.	20 pontos	
		50 pontos
	TOTAL	**200 pontos**