GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/2.ª Fase 15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma reta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 3, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Um doente esteve internado numa certa unidade hospitalar.

1. Na preparação de um medicamento para administrar ao doente, foram misturadas algumas substâncias. Uma das substâncias, pelas suas características, demorou algum tempo a ser despejada de um recipiente para uma tina.

Admita que a quantidade Q, em centilitros, da substância existente no recipiente, t minutos após o recipiente ter começado a ser esvaziado até ao momento em que ficou vazio, é dada por

$$Q(t) = 3 - \log_2 (t+1)$$

Determine a quantidade de substância existente no recipiente no momento em que t foi igual a metade do tempo que este demorou a ficar vazio.

Apresente o resultado em centilitros, arredondado às décimas.

Se efetuar cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. Durante o tempo de internamento, foi necessário fazer alguns registos da temperatura corporal do doente.

Num determinado dia, o primeiro registo foi feito às 0 horas e o último registo foi feito às 24 horas, não se tendo verificado nenhuma ocorrência de temperaturas iguais em registos consecutivos.

A temperatura corporal, T, em graus Celsius, do doente, às x horas desse dia, pode ser modelada por uma função polinomial do terceiro grau, de variável independente x, com $x \in [0, 24]$

2.1. De acordo com os registos desse dia, verificou-se que a taxa de variação média da temperatura corporal do doente, das 0 horas às 12 horas, foi positiva. Porém, essa informação não é suficiente para se concluir que a temperatura corporal do doente, durante essas doze horas, esteve **sempre** a aumentar.

Apresente um motivo que justifique que a informação disponível não é suficiente para se chegar à conclusão acima referida.

2.2. Do relatório que descrevia a situação do doente nesse dia constava a informação seguinte:

«(…) A temperatura corporal do doente variou ao longo do dia, admitindo-se que o valor mínimo ocorreu pelas 4 horas e 30 minutos e que o valor máximo ocorreu pelas 17 horas e 30 minutos. Às 23 horas, a temperatura estava a descer cerca de meio grau Celsius por hora. (…)»

De acordo com a descrição apresentada no relatório, apenas uma das expressões seguintes pode definir a função que dá, em graus Celsius por hora, a taxa de variação instantânea da função T no instante x

A) $-0{,}0099\,x^2+0{,}2182\,x-0{,}7815$

B) $-0{,}0037\,x^2+0{,}0772\,x-0{,}3309$

C) $+0{,}0051\,x^2-0{,}1123\,x+0{,}4021$

D) $-0{,}0051\,x^2+0{,}1124\,x-0{,}4026$

Numa pequena composição, apresente, para cada uma das três expressões que não podem definir essa função, uma razão que justifique essa impossibilidade.

Nos cálculos que efetuar, utilize valores arredondados às décimas.

GRUPO II

Dois amigos, o Diogo e o Eduardo, criaram um jogo a que chamaram Choque de Triângulos.

O jogo é disputado por dois jogadores num tabuleiro retangular. Nesse tabuleiro, estão representados um referencial ortogonal e monométrico xOy, os pontos A e B, de coordenadas $(-8, 0)$ e $(0, 8)$, respetivamente, e o segmento de reta $[AB]$. Estão também assinalados o primeiro quadrante, com I, e o segundo quadrante, com II, conforme sugere a Figura 1.

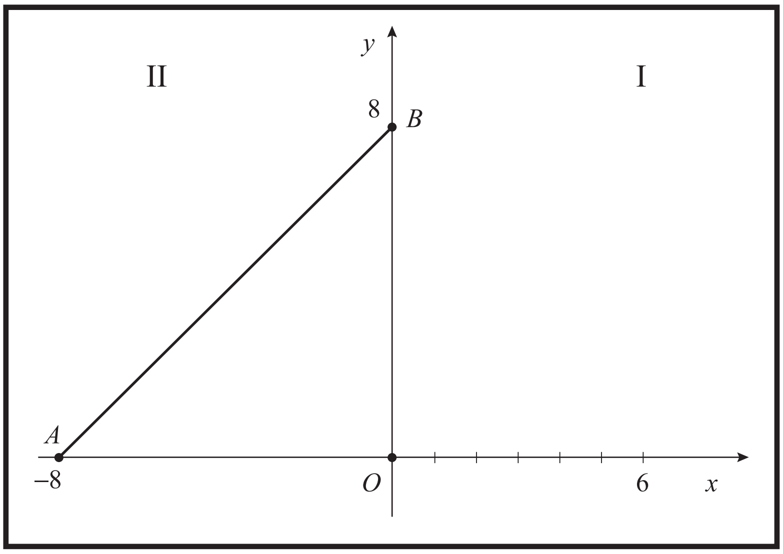

Figura 1

O jogo inicia-se com o sorteio dos quadrantes entre os dois jogadores. De seguida, a partir do lançamento de um dado cúbico equilibrado com as faces numeradas de 1 a 6, são construídos dois triângulos, um no quadrante I e outro no quadrante II.

Para se obterem os triângulos, é necessário lançar o dado uma vez e, no referencial representado no tabuleiro, fazer uma construção geométrica, de acordo com os passos seguintes:

- marcar, no eixo Ox, o ponto P de abcissa igual ao número inscrito na face que ficar voltada para cima no lançamento do dado;
- traçar a reta r, perpendicular a $[AB]$ e que passa no ponto P
- marcar o ponto M, ponto de intersecção de r com $[AB]$
- marcar o ponto N, ponto de intersecção de r com o eixo Oy
- sombrear os triângulos $[MNB]$ e $[NOP]$

Depois, calculam-se as áreas dos triângulos $[MNB]$ e $[NOP]$ e comparam-se os respetivos valores.

Ganha o jogador que, no sorteio, tenha ficado com o quadrante em que se obtiver o triângulo de maior área.

1. A Figura 2 ilustra a representação geométrica obtida num jogo em que saiu o número 3 no lançamento do dado.

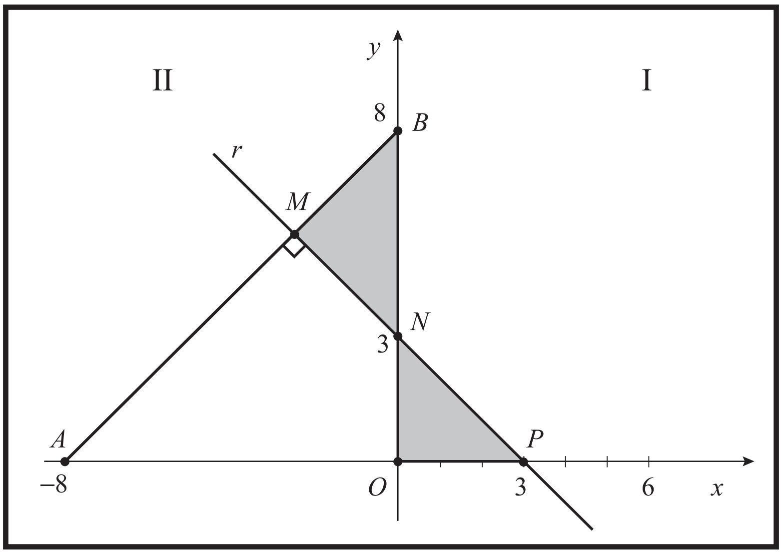

Figura 2

Obtenha a equação reduzida da reta r representada no referencial do tabuleiro da Figura 2.

2. Conforme foi descrito, no jogo Choque de Triângulos, a abcissa do ponto P depende do número inscrito na face que ficar voltada para cima no lançamento do dado.

Seja x a abcissa do ponto P

2.1. Mostre que a função que dá a área do triângulo $[NOP]$, para cada valor de x, pode ser definida por

$$f(x) = 0{,}5x^2 \quad \text{com} \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2.2. A função que dá a área do triângulo $[MNB]$, para cada valor de x, pode ser definida por

$$g(x) = 0{,}25x^2 - 4x + 16 \quad \text{com} \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Note que a área do triângulo $[NOP]$, para cada valor de x, é dada por

$$f(x) = 0{,}5x^2 \quad \text{com} \quad x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2.2.1. Num jogo do Choque de Triângulos, o quadrante I foi atribuído ao Diogo e o quadrante II ao Eduardo.

Nesse jogo, a face que ficou voltada para cima, no lançamento do dado, tinha inscrito o número 4.

Quem ganhou o jogo?

Justifique a sua resposta.

2.2.2. Mostre que, em qualquer jogo do Choque de Triângulos, existe sempre um, e apenas um, vencedor.

GRUPO III

O movimento de uma criança num baloiço e o movimento do pêndulo de um relógio de parede são exemplos de movimentos em que há oscilação de um corpo. Essa oscilação, com o decorrer do tempo, poderá manter-se inalterada ou ser cada vez menor, dependendo das condições em que se realiza o movimento.

1. Uma esfera está suspensa de um fio, paralelamente a uma parede. O fio, não extensível, está preso numa barra fixa, colocada em posição horizontal.

Num determinado instante, a esfera é posta em movimento e fica a oscilar num plano vertical, sem nunca tocar na parede.

A situação está esquematizada na Figura 3, em que:

- $[CD]$ representa a barra;
- o ponto O é o ponto médio de $[CD]$
- o ponto P representa o centro da esfera, em movimento;
- $[OP]$ representa o fio, com 1 metro de comprimento;
- o ponto R representa a posição ocupada pelo centro da esfera quando o fio se encontra na vertical;
- $[OR]$ é perpendicular a $[CD]$
- o ponto A representa a posição ocupada pelo centro da esfera no instante inicial;
- o ponto B representa a posição mais próxima da barra, alcançada pelo centro da esfera depois de passar, pela primeira vez, na posição representada pelo ponto R
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo COP

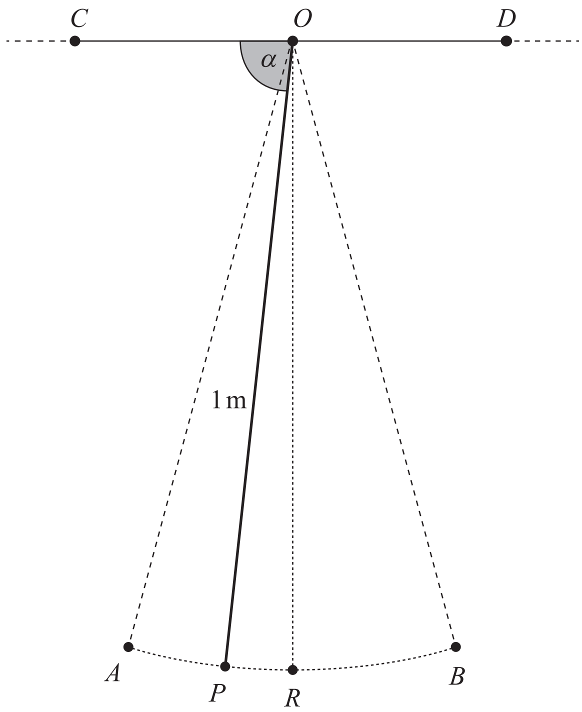

Figura 3

Admita que, t segundos após o instante inicial, o ponto P está numa posição tal que a amplitude α, em radianos, é dada, aproximadamente, pela função L, definida por

$$L(t) = \frac{\pi}{2} - 1{,}1^{-0{,}8t} \times \frac{\pi}{12} \times \cos(\pi t) \quad \text{para } t \geq 0$$

1.1. Em cada instante, a distância do centro da esfera à barra é o comprimento do segmento de reta que une, na perpendicular, P a $[CD]$; em particular, no instante inicial, a distância do centro da esfera à barra é o comprimento do segmento de reta que une, na perpendicular, A a $[CD]$

Mostre que a distância do centro da esfera à barra, no instante inicial, está compreendida entre 96 centímetros e 97 centímetros.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.2. O gráfico da função L admite a reta de equação $y = \frac{\pi}{2}$ como assíntota.

Interprete, no contexto do problema, o facto de a reta de equação $y = \frac{\pi}{2}$ ser assíntota do gráfico da função L

2. Um desenhador gráfico, inspirado no movimento pendular de uma esfera, criou um esquema, com o objetivo de elaborar um painel publicitário.

A Figura 4 mostra esse esquema, no qual estão representados:

- uma semicircunferência de centro no ponto O e diâmetro $[FG]$
- o ponto R, pertencente à semicircunferência, tal que $[OR]$ é perpendicular a $[FG]$
- a reta s, paralela a $[FG]$, que contém o ponto R
- uma sequência de pontos, $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{n-1}, P_n, \ldots$, pertencentes à semicircunferência FRG, alternadamente marcados à esquerda e à direita de $[OR]$, de modo que:
  - P_1 dista $5\,\text{dm}$ da reta s
  - P_2 dista $4{,}5\,\text{dm}$ da reta s
  - P_3 dista $4{,}05\,\text{dm}$ da reta s
  - e assim sucessivamente, sendo a distância, em decímetros, de cada ponto da sequência à reta s igual a $\frac{9}{10}$ da distância do ponto anterior da sequência à mesma reta.

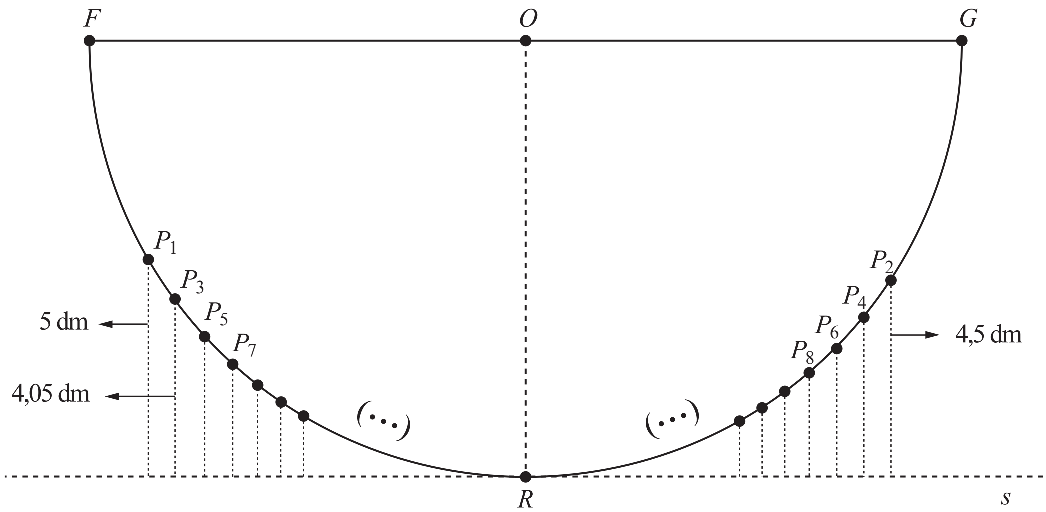

Figura 4

Admita que o número n de pontos pode ser tão grande quanto se queira, de modo que a distância, em decímetros, do ponto P_n à reta s é igual a $\frac{9}{10}$ da distância do ponto P_{n-1} à mesma reta, para qualquer valor de n superior a 1

Considere a sucessão (d_n), em que d_n é a distância, em decímetros, do ponto P_n à reta s

2.1. Mostre que o termo geral de (d_n) pode ser dado pela expressão $\frac{50}{9} \times 0{,}9^n$

2.2. Mostre que, por mais pontos que se considerem, a soma das sucessivas distâncias dadas por (d_n) nunca é superior a 50 dm

GRUPO IV

No âmbito de um trabalho para a disciplina de Matemática B, um grupo de alunos realizou, junto das turmas do ensino básico da sua escola, uma sondagem, com o objetivo de estudar alguns dos hábitos dos alunos daquele nível de ensino. Para o efeito, elaborou-se um inquérito que foi aplicado a uma amostra constituída por 200 alunos.

1. Duas das questões incluídas no inquérito foram:

- questão A: *«Costumas ir à praia?»*
- questão B: *«Costumas ir ao cinema?»*

Todos os alunos inquiridos responderam ou *«Sim»* ou *«Não»* a cada uma destas questões, e verificou-se que:

- 150 alunos responderam *«Sim»* à questão A;
- 140 alunos responderam *«Sim»* à questão B;
- 20 alunos responderam *«Não»* às duas questões.

Foi selecionado, ao acaso, um aluno de entre os que responderam *«Sim»* à questão A.

Determine a probabilidade de esse aluno ter respondido *«Sim»* à questão B.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

2. Na Figura 5, está representada graficamente a função F, função cumulativa cuja variável independente, x, representa a idade, em anos, expressa em números inteiros, aquando da aplicação do inquérito, dos 200 alunos que constituíram a amostra da sondagem.

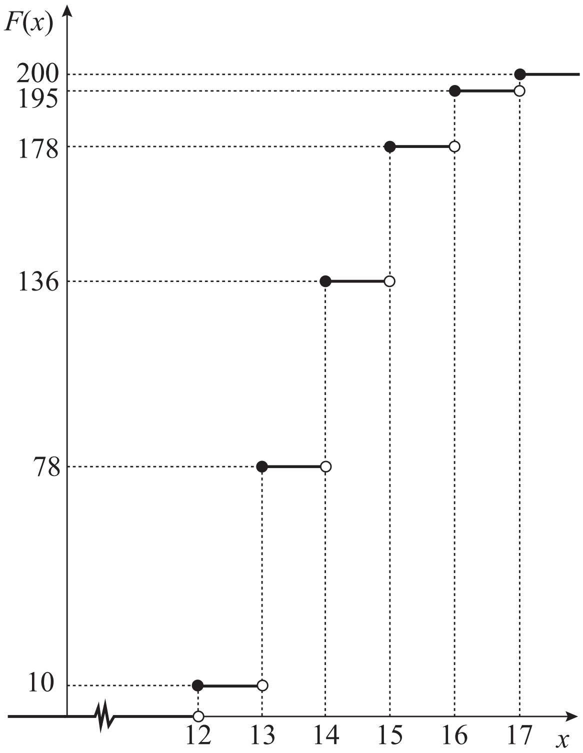

Figura 5

Admita que, dois anos após a aplicação do inquérito, todos os alunos inquiridos continuavam na mesma escola.

Determine o desvio padrão das idades que, dois anos após a aplicação do inquérito, teriam os 200 alunos que constituíram a amostra da sondagem.

Apresente o resultado final arredondado às centésimas.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	20 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	20 pontos
	50 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	
2.2.1.	15 pontos
2.2.2.	20 pontos
	65 pontos

GRUPO III

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	15 pontos
	55 pontos

GRUPO IV

1.	15 pontos
2.	15 pontos
	30 pontos

TOTAL .... **200 pontos**