GOVERNO DE PORTUGAL

MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 74/2004, de 26 de março

Prova Escrita de Matemática B

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 735/Época Especial

12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2012

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente:

- sempre que recorrer às capacidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos, mínimos, etc.);
- sempre que recorrer a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- sempre que recorrer a estatísticas obtidas na calculadora (média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive e ordenada na origem de uma reta de regressão, etc.), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, na página 3, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Um octaedro cujas faces sejam oito triângulos equiláteros é um dos cinco sólidos platónicos.

1. Na Figura 1, encontra-se representado, num referencial ortogonal e monométrico $Oxyz$, o octaedro regular $[ABCDEF]$, cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.

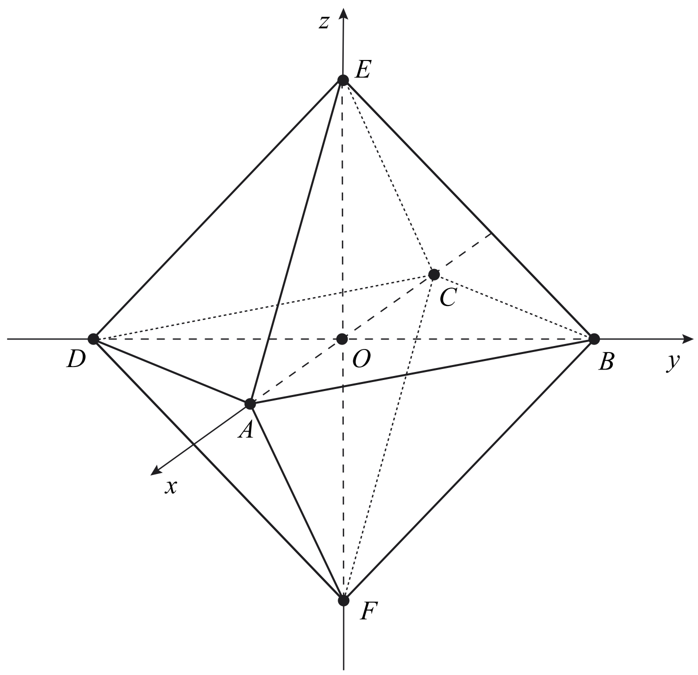

Figura 1

Os pontos A e B pertencem, respetivamente, aos semieixos positivos Ox e Oy

O ponto E tem coordenadas $(0, 0, 5)$

Escreva as coordenadas do ponto simétrico do ponto B em relação à origem do referencial. Justifique a sua resposta.

2. Um octaedro truncado é um poliedro convexo que tem faces que são quadrados e faces que são hexágonos regulares, conforme representado na Figura 2.

Para se obter um octaedro truncado, secciona-se um octaedro regular por seis planos. Cada um dos planos é perpendicular a uma diagonal espacial, de forma que as arestas das seis pirâmides obtidas meçam um terço da aresta do octaedro.

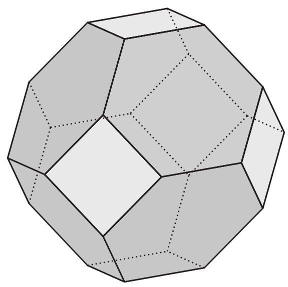

Figura 2

A Figura 3 ilustra a truncatura de um octaedro de aresta a por dois desses planos.

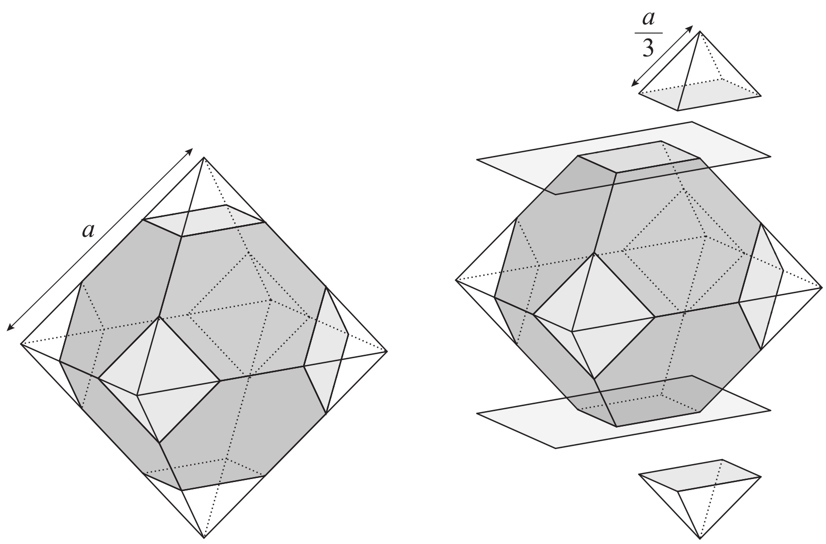

Figura 3

Uma empresa vai lançar um novo perfume, que será comercializado em frascos de espessura desprezável e com a forma de um octaedro truncado.

Cada frasco de perfume é obtido por truncatura de um octaedro regular com 100 cm^3 de volume.

Determine o volume de cada frasco de perfume.

Apresente o resultado, em cm^3, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

Sugestão – Na sua resposta, poderá ter em conta que cada uma das seis pirâmides resultantes da truncatura pelos seis planos é semelhante a uma das pirâmides quadrangulares regulares que compõem o octaedro.

GRUPO II

Um grupo de alunos de um programa de doutoramento em História da Matemática organizou uma visita de estudo a Itália. O objetivo desta visita foi dar a conhecer aos alunos participantes duas cidades do antigo império grego: Siracusa, cidade natal de Arquimedes, e Crotona, sede da Escola Pitagórica.

A Maria, uma das alunas do programa de doutoramento, coordenou a organização da visita de estudo.

1. A deslocação a Itália fez-se de autocarro.

Uma das transportadoras contactadas pela Maria apresentou uma proposta em que o preço por pessoa, P, em euros, dependia do número total, k, de pessoas a transportar, de acordo com a expressão

$$P(k) = \frac{350}{k} + 42{,}5 \qquad \text{com } k > 0$$

Esta proposta foi analisada pela organização tendo em conta os seguintes requisitos:

I) se a um grupo de 56 pessoas se acrescentar uma pessoa, deve haver uma redução de, pelo menos, $0{,}20$ euros por pessoa;

II) para um grupo de 70 pessoas, o preço a pagar por pessoa não deve ser superior a 50 euros;

III) se o grupo passar de 50 para 100 pessoas, deve haver uma diminuição de 4 euros por pessoa.

Elabore uma pequena composição, na qual justifique que a proposta apresentada pela transportadora não cumpre os requisitos I) e III), mas cumpre o requisito II).

2. Numa noite, em Crotona, os alunos assistiram a uma peça de teatro que retratava a vida na cidade, na época da Escola Pitagórica.

O anfiteatro, montado propositadamente para a realização da peça, tinha uma plateia constituída por 399 lugares, distribuídos por filas, de tal modo que:

- cada fila era constituída por um número ímpar de lugares;
- a segunda fila tinha mais dois lugares do que a primeira fila, a terceira fila tinha mais dois lugares do que a segunda fila, e assim sucessivamente, até à última fila, que tinha mais dois lugares do que a penúltima fila.

2.1. A Maria ficou sentada num dos lugares da $17.^{\text{a}}$ fila, que tinha 35 lugares.

Determine o número de filas da plateia.

2.2. Acredita-se que Pitágoras foi o primeiro matemático a relacionar a soma dos n primeiros números ímpares com os quadrados perfeitos.

Por exemplo:

- a soma dos dois primeiros números ímpares, $1 + 3$, pode ser dada por 2^2
- a soma dos três primeiros números ímpares, $1 + 3 + 5$, pode ser dada por 3^2

Mostre que a soma dos n primeiros números ímpares pode ser dada por n^2

Na sua resposta, considere o facto de a sucessão dos números ímpares ser uma progressão aritmética.

2.3. Na noite em que se realizou a peça de teatro, cada uma das pessoas que assistiram à peça ocupou um dos lugares da plateia e apenas 10 lugares ficaram livres.

Admita que a altura, em metros, das pessoas que assistiram à peça de teatro seguia uma distribuição normal de valor médio $1{,}68$ e de desvio padrão $0{,}08$

2.3.1. Estime o número de pessoas que assistiram à peça de teatro cuja altura era superior a $1{,}76$ metros.

2.3.2. Escolhendo, ao acaso, uma das pessoas que assistiram à peça de teatro, a probabilidade, arredondada às centésimas, de a sua altura estar compreendida entre $1{,}56$ metros e $1{,}80$ metros é $0{,}87$

Qual é a probabilidade, arredondada às décimas, de, escolhida, ao acaso, uma das pessoas que assistiram à peça de teatro, a sua altura ser inferior a $1{,}80$ metros?

Justifique a sua resposta apenas com base nas propriedades da curva de Gauss.

Em cálculos intermédios, não efetue arredondamentos.

GRUPO III

Chama-se catenária à curva formada por um fio flexível e não extensível suspenso livremente de dois pontos.

Num terreno plano e sem inclinação, foram fixados no chão, em posição vertical, alinhados na mesma direção, três postes de eletricidade. Um fio elétrico une os topos dos três postes, sem qualquer interrupção, ficando o fio, por ação da gravidade, suspenso entre dois postes consecutivos.

A Figura 4 esquematiza a situação.

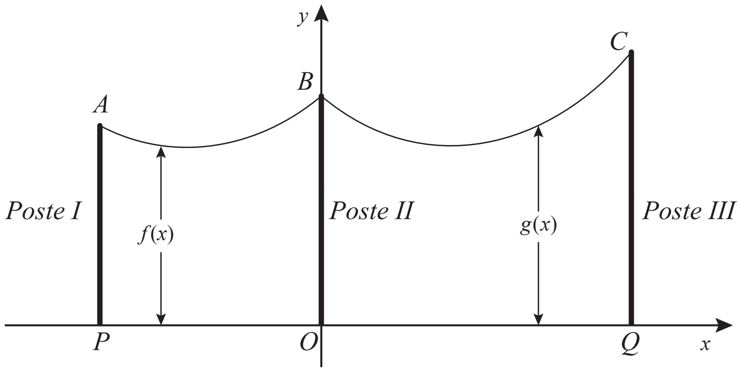

Figura 4

Relativamente à Figura 4, sabe-se que:

- xOy é um referencial ortogonal, no qual, em qualquer dos eixos, cada unidade corresponde a 1 metro;
- o eixo Ox representa a linha de superfície do solo;
- o ponto P pertence ao semieixo negativo Ox, o ponto Q pertence ao semieixo positivo Ox, e o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- $[AP]$, $[BO]$ e $[CQ]$ representam os três postes, designados, respetivamente, por *Poste I*, *Poste II* e *Poste III*;
- $\overline{PO} = 25$ e $\overline{OQ} = 35$
- $f(x)$ é a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado entre o ponto A e o ponto B, de abcissa x, para qualquer valor de $x \in [-25, 0]$
- $g(x)$ é a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado entre o ponto B e o ponto C, de abcissa x, para qualquer valor de $x \in [0, 35]$

Admita que as funções f e g são definidas, respetivamente, pelas seguintes expressões:

$$f(x) = 10\left(e^{-0,05x-0,75} + e^{0,05x+0,75}\right) \quad \text{com } x \in [-25, 0]$$

$$g(x) = 10\left(e^{0,05x-0,75} + e^{-0,05x+0,75}\right) \quad \text{com } x \in [0, 35]$$

1. Calcule a média das alturas dos três postes.

Apresente o resultado, em metros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, utilize, pelo menos, duas casas decimais.

2. Um pardal pousou num determinado ponto T do fio, situado entre o *Poste II* e o *Poste III*.

Sabe-se que os pontos T e B estão exatamente à mesma distância do solo.

Determine a distância do ponto T ao ponto Q (ponto que representa a base do *Poste III*).

Apresente o resultado, em metros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, utilize quatro casas decimais.

3. Admita que um ponto D se desloca ao longo do fio, da esquerda para a direita, desde o ponto B até ao ponto C

Seja M o ponto do fio de abcissa 15

Sabe-se que o valor, arredondado às décimas, da taxa de variação média da função g, no intervalo $[0, 15]$, é $-0,4$

Interprete, no contexto do problema, o significado deste valor, relativamente ao deslocamento do ponto D no fio.

GRUPO IV

Um arquiteto paisagista projetou um jardim que teria uma zona relvada com a forma de um losango de 10 metros de lado.

Nessa zona relvada, seria instalado um sistema automático de rega, composto por quatro dispositivos, que seriam colocados de modo que cada um deles fosse fixado em cada um dos pontos correspondentes aos vértices do losango. Cada dispositivo deveria regar uma região da zona relvada com a forma de um sector circular de 5 metros de raio, centrado no ponto onde seria fixado o dispositivo e delimitado pelos lados do losango.

O arquiteto estudou diferentes configurações da zona relvada, para que, quando o sistema de rega estivesse em funcionamento, nenhuma região da zona relvada fosse regada por dois dispositivos distintos.

A Figura 5 esquematiza uma possível configuração da zona relvada, em que:

- $[ABCD]$ é um losango de 10 metros de lado;
- A, B, C e D representam os pontos da zona relvada nos quais se fixariam os dispositivos;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo ABD, com $30° \leq \alpha \leq 60°$
- cada sector circular sombreado, de 5 metros de raio, corresponde à região da zona relvada que cada dispositivo deveria regar.

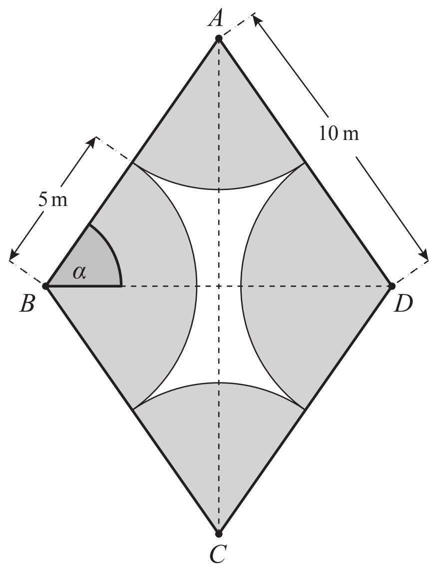

Figura 5

1. Na zona relvada, a área, em metros quadrados, da região regada pelo sistema automático seria sempre igual a 25π, independentemente do valor de α

Mostre que, na zona relvada, a área, r, em metros quadrados, da região **não regada** pelo sistema automático, em função de α, seria dada por

$$r(\alpha) = 200\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - 25\pi \quad \text{com } 30° \leq \alpha \leq 60°$$

2. Determine os valores de α, em graus, para os quais, na zona relvada, a área, em metros quadrados, da região **não regada** pelo sistema automático seria **mínima**.

Note que, na zona relvada, a área, r, em metros quadrados, da região não regada pelo sistema automático, em função de α, seria dada por $r(\alpha) = 200\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - 25\pi$ com $30° \leq \alpha \leq 60°$

3. Posteriormente, o arquiteto optou por uma configuração da zona relvada em que $\alpha > 45°$

Quando foi efetuado o primeiro teste ao sistema automático de rega, verificou-se que os quatro dispositivos estavam a regar as regiões previstas, mas que um deles estava também a regar uma região exterior à zona relvada.

A região regada por aquele dispositivo era um semicírculo de 5 metros de raio, como se ilustra na Figura 6, em que:

- 2α é a amplitude, em graus, do sector circular que representa a região regada na zona relvada;
- θ é a amplitude, em graus, do sector circular que representa a região regada exterior à zona relvada.

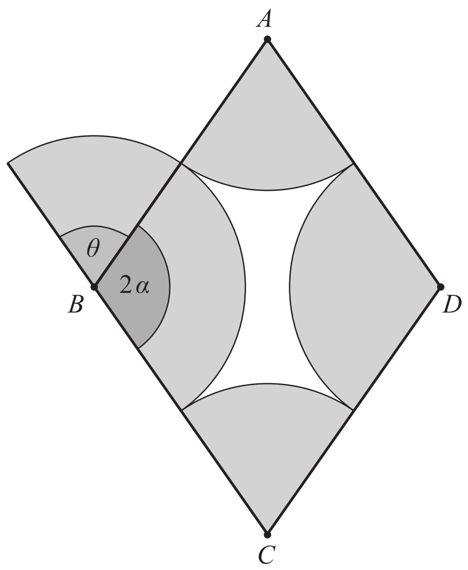

Figura 6

Determine o valor de θ, considerando que, nesta configuração, a área, na zona relvada, da região **não regada** pelo sistema automático é igual a 15 metros quadrados.

Apresente o resultado, em graus, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve três casas decimais.

Note que, na zona relvada, a área, r, em metros quadrados, da região não regada pelo sistema automático, em função de α, seria dada por $r(\alpha) = 200\,\text{sen}(\alpha)\cos(\alpha) - 25\pi$ com $30^{\text{o}} \leq \alpha \leq 60^{\text{o}}$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	10 pontos
2.	20 pontos
	30 pontos

GRUPO II

1.	20 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	10 pontos
2.3.	
2.3.1.	15 pontos
2.3.2.	15 pontos
	75 pontos

GRUPO III

1.	15 pontos
2.	20 pontos
3.	15 pontos
	50 pontos

GRUPO IV

1.	15 pontos
2.	15 pontos
3.	15 pontos
	45 pontos

TOTAL .... **200 pontos**