GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

GABINETE DE AVALIAÇÃO EDUCACIONAL

EXAME NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

10.º e 11.º Anos de Escolaridade

Prova 835/2.ª Fase 13 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2013

Página em branco

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser primeiramente elaborados a lápis, sendo a seguir passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Em todas as respostas, indique todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não for pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exato**.

Sempre que, na resolução de um problema, recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização. Mais precisamente, sempre que recorrer:

- às potencialidades gráficas da calculadora, apresente o(s) gráfico(s) obtido(s), bem como as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução do problema proposto (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos ou mínimos);
- a uma tabela obtida na calculadora, apresente todas as linhas da tabela relevantes para a resolução do problema proposto;
- a estatísticas obtidas na calculadora (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação, declive ou ordenada na origem de uma reta de regressão), apresente a(s) lista(s) que introduziu na calculadora para as obter.

A prova inclui, nas páginas 4 e 5, o Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Teoria Matemática das Eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

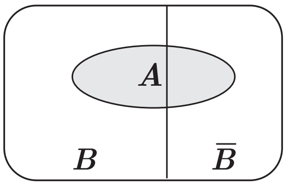
Modelos de Grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

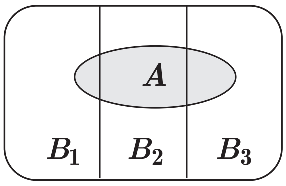
Teorema da Probabilidade Total e Regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Intervalos de Confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. Em dezembro de 2012, no Grupo Desportivo de Pontes de Cima (GDP), realizaram-se eleições para a direção. O método aplicado para a conversão de votos em mandatos foi o método de Hondt.

Na Tabela 1, estão indicados os números de votos, validamente expressos, obtidos pelas quatro listas concorrentes.

Os votos em branco ou nulos não foram considerados como votos validamente expressos.

Tabela 1

Lista	A	B	C	D
Número de votos	1232	1035	613	555

Nessa eleição, foram atribuídos 8 mandatos, correspondentes aos lugares da direção.

1.1. Uma comissão estuda a possibilidade de pedir a alteração do método de distribuição de mandatos para a direção. Alguns candidatos acreditam que, se a distribuição se tivesse concretizado pelo método de Hamilton, teriam sido eleitos.

Segundo o método de Hamilton, a distribuição de mandatos faz-se da forma seguinte.

- Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de votos das listas pelo número total de mandatos.
- Calcula-se a quota padrão para cada uma das listas, dividindo-se o número de votos de cada lista pelo divisor padrão.
- Atribui-se a cada lista um número de mandatos igual à parte inteira da quota padrão.
- Caso ainda fiquem mandatos por distribuir, ordenam-se, por ordem decrescente, as partes decimais das várias quotas padrão e atribuem-se os mandatos que restam às listas cujas quotas padrão tenham partes decimais maiores (um para cada lista).
- Na atribuição do último mandato, se houver duas listas cujas quotas padrão apresentem a mesma parte decimal, atribui-se o último mandato à lista com o menor número de mandatos.

Determine a lista que poderia aumentar o número de mandatos, supondo que se concretizava a alteração.

Na sua resposta, deve:

- aplicar o método de Hondt para determinar a distribuição dos 8 mandatos;
- aplicar o método de Hamilton para determinar a distribuição dos 8 mandatos;
- concluir, a partir da comparação entre os dois resultados.

Apresente os valores dos quocientes, resultantes da aplicação do método de Hondt, arredondados com uma casa decimal e o valor do divisor padrão e os valores das quotas padrão, resultantes da aplicação do método de Hamilton, arredondados com três casas decimais.

1.2. O número de votos obtidos por cada uma das listas condiciona o acesso aos bens que são propriedade do GDP.

As listas vão fazer a partilha do acesso aos bens, e o método utilizado é o seguinte.

- Cada lista atribui um valor monetário a cada um dos bens, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. No final, são abertos os envelopes e são registados, numa tabela, os valores das licitações de todas as listas.
- Determina-se o valor global atribuído aos bens por cada lista e o valor que cada lista considera justo receber, designado por porção justa. A porção justa obtém-se, para cada lista, multiplicando-se a percentagem de votos, arredondada às unidades, que a lista obteve pela soma das licitações feitas por essa lista.
- Cada bem é atribuído à lista que mais o valoriza, e considera-se que ela recebe o valor que atribui a esse bem. Se uma lista não receber qualquer bem, considera-se, para efeitos de cálculo, que o «valor dos bens recebidos» por essa lista é zero.
- Se o valor dos bens recebidos por uma lista for superior ou for inferior à porção justa por si determinada, então essa lista terá de pagar ou de receber a diferença, respetivamente.
- Caso exista excesso, este obtém-se subtraindo-se ao total do valor a pagar o total do valor que as listas têm a receber.
- O excesso, caso exista, é distribuído na proporção direta da percentagem de votos, arredondada às unidades, da lista em causa.

Na Tabela 2, estão registados os valores monetários, em euros, atribuídos, nas licitações secretas, por cada lista a cada um dos bens.

Tabela 2

Lista	**A**	**B**	**C**	**D**
Automóvel	10 000	15 000	12 500	12 000
Computador	1500	500	2000	2500

Determine a partilha dos dois bens, e o valor a receber ou a pagar por cada lista, aplicando o método descrito, de forma que nenhuma lista tenha razão para reclamar.

1.3. Na Tabela 3, encontra-se a distribuição, por sexo, dos votos validamente expressos obtidos pelas quatro listas concorrentes, nas eleições para a direção do GDP.

Tabela 3

Lista	**A**	**B**	**C**	**D**
Número de votos de mulheres	714	624	358	305
Número de votos de homens	518	411	255	250

Escolhe-se, aleatoriamente, um votante. Sejam H e D os acontecimentos seguintes.

H: «ser um homem»;

D: «votar na lista D».

Verifique se os acontecimentos H e D são, ou não, acontecimentos independentes.

2. Um grupo de professores de Educação Física do agrupamento de escolas de Pontes de Cima pretende promover hábitos de vida saudáveis. Para a concretização desse projeto, os professores decidiram organizar uma caminhada no jardim municipal.

Na Figura 1, encontra-se um grafo que serve de modelo ao percurso dessa caminhada.

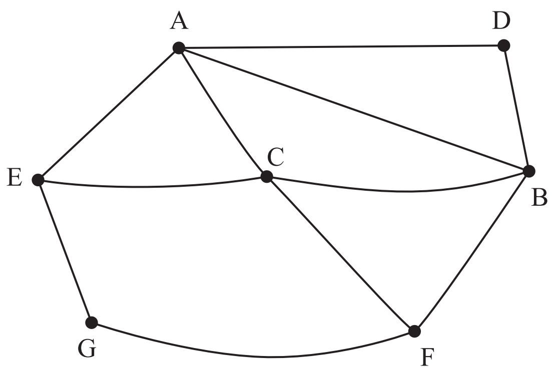


Figura 1

No grafo, os vértices A, B, C, D, E, F e G representam os postos de visita obrigatória. Cada aresta representa um trajeto direto que liga dois desses postos.

Mostre que não é possível organizar um percurso para essa caminhada que cumpra, em simultâneo, as seguintes condições:

- passar por todos os postos representados no grafo da Figura 1, começando e terminando no posto A;
- percorrer uma só vez cada trajeto direto representado;
- percorrer todos os trajetos diretos representados.

3. Na Tabela 4, apresenta-se o número de habitantes de Pontes de Cima entre 1980, ano do início da contagem, e 2010, ano do último registo conhecido.

Considere que $t = 0$ corresponde ao ano 1980, sendo t o número de anos que decorrem a partir do início da contagem.

Tabela 4

Ano	*t*	Número de habitantes (N)
1980	0	650
1985	5	940
1990	10	1380
1995	15	1999
2000	20	2373
2005	25	2712
2010	30	5526

Um modelo matemático que se ajusta bem à nuvem de pontos correspondente ao número N de habitantes da localidade, em função de t, é

$$N(t) = 678{,}211 \times e^{0{,}065t} \qquad (t = 0, 1, 2, ...)$$

3.1. Determine a previsão do número de habitantes para o ano 2018, caso se adote o modelo N por um período de tempo mais alargado.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

3.2. A Joana é aluna da escola secundária desta localidade. Ao estudar os dados apresentados na Tabela 4, constatou que, tendo em conta apenas os valores de N correspondentes a $t = 0, 5, 10, 15$ e 20, um modelo matemático que se ajusta bem a esses pontos é $y(t) = a \times t + b$ (sendo y o número de habitantes e t o número de anos que decorrem a partir do início da contagem, em 1980).

Determine o valor aproximado do crescimento anual do número de habitantes da localidade, de acordo com o modelo apresentado pela Joana.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

3.3. Admita, agora, que o modelo $N(t) = 678{,}211 \times e^{0{,}065t}$ permite obter com maior aproximação o número N de habitantes daquela localidade para além do período em que ocorreu a recolha de dados.

Segundo o presidente da junta de freguesia de Pontes de Cima, quando o número de habitantes atingir 7000, será construída uma nova escola.

Determine o ano em que isso ocorre, recorrendo à representação gráfica.

Na sua resposta, deve:

- indicar, na folha de respostas, uma janela de visualização adequada à resolução do problema;
- apresentar a representação gráfica da função ou das funções utilizadas;
- assinalar o(s) ponto(s) relevante(s);
- concluir.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

4. Na Tabela 5 e na Tabela 6, encontram-se, respetivamente, o número total de pontos de acesso à rede postal e a densidade postal (número de habitantes / número de pontos de acesso), de 2001 a 2009, em Portugal.

Tabela 5

Ano	Número total de pontos de acesso à rede postal
2001	19 775
2002	21 758
2003	21 008
2004	20 630
2005	20 457
2006	20 215
2007	19 897
2008	19 155
2009	18 394

Tabela 6

Ano	Densidade postal (habitantes / pontos de acesso)
2001	471,3
2002	481,4
2003	501,2
2004	512,5
2005	517,9
2006	525,5
2007	534,1
2008	554,8
2009	563,2

4.1. Ao serem representados os dados que constam da Tabela 5 e da Tabela 6 num diagrama de dispersão, verificou-se que o ponto $(19\,775;\ 471{,}3)$, correspondente ao ano 2001, se encontrava fora do contexto dos restantes, se se pretendesse ajustar um modelo de regressão linear, sendo considerado um *outlier*.

Explique o efeito da exclusão do *outlier* no valor do coeficiente de correlação linear e na reta de regressão quando se pretende fazer previsões.

Na sua resposta, deve:

- apresentar os dados das Tabelas 5 e 6 num diagrama de dispersão, incluindo o ano 2001;
- determinar o valor do coeficiente de correlação linear entre as variáveis *número total de pontos de acesso à rede postal* (x) e *densidade postal* (y), incluindo o ano 2001;
- apresentar a simulação do efeito da exclusão do ano 2001 no valor do coeficiente de correlação linear e na reta de regressão $y = ax + b$;
- referir o efeito da exclusão do *outlier* quando se pretende fazer previsões.

Apresente os resultados com arredondamento às milésimas.

4.2. Em 2004, num determinado concelho com doze pontos de acesso à rede postal, a média do número de habitantes por cada ponto de acesso foi $512{,}5$. No seguinte conjunto de números relativos aos habitantes servidos por cada um dos doze pontos de acesso nesse concelho, no ano de 2004, falta o número de habitantes, $\boldsymbol{a}$, servidos por um ponto de acesso.

$$531 \quad 518 \quad 481 \quad 535 \quad 493 \quad 500 \quad 490 \quad \boldsymbol{a} \quad 525 \quad 502 \quad 493 \quad 550$$

Determine o valor do desvio padrão do número de habitantes servidos por cada um dos pontos de acesso desse concelho, em 2004.

Comece por calcular o valor de $\boldsymbol{a}$.

Apresente o valor do desvio padrão arredondado às unidades.

4.3. O Portal do Consumidor tem recebido queixas pelo aumento, verificado entre 2001 e 2009, da densidade postal (número de habitantes / número de pontos de acesso). Em 2012, uma recolha aleatória em 200 desses pontos indicou uma média amostral de $\overline{x}$ habitantes por cada ponto de acesso e um desvio padrão amostral de s habitantes.

Tendo em conta os valores de $\overline{x}$ e de s, obteve-se o intervalo $]546, 554[$ para estimar o número médio de habitantes servidos por cada ponto de acesso à rede postal, em 2012, com uma confiança de 90%

Determine os valores de $\overline{x}$ e de s, com os quais se obteve o intervalo $]546, 554[$

Apresente os valores de $\overline{x}$ e de s arredondados às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

5. Todos os dias de manhã, o André vai para a escola de automóvel, com o pai. A duração da viagem, em minutos, é uma variável aleatória normal com valor médio igual a 21 minutos e desvio padrão igual a 4 minutos.

Note que:

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) \approx 68{,}27\%$

$P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) \approx 95{,}45\%$

$P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) \approx 99{,}73\%$

Escolhe-se, aleatoriamente, um dia.

5.1. Considera-se que o André chega atrasado à aula se chegar à escola depois das $8\,\text{h}\ 30\,\text{min}$.

Determine o valor aproximado para a probabilidade de o André chegar atrasado à aula se sair de casa às $8\,\text{h}\ 01\,\text{min}$.

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

5.2. Antes de iniciar o percurso para a escola, o pai do André consulta o GPS instalado no seu automóvel, para saber se há engarrafamento nas estradas que costuma utilizar.

Se houver engarrafamento, o pai do André utiliza um percurso alternativo, o que faz com que a viagem dure mais de 25 minutos.

Determine o valor aproximado para a probabilidade de, em três dias, exatamente dois dias reunirem as condições em que o pai do André faz o percurso alternativo.

Apresente o resultado na forma de percentagem, com arredondamento às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

1.		
1.1.	20 pontos	
1.2.	20 pontos	
1.3.	15 pontos	
		55 pontos
2.	15 pontos	
		15 pontos
3.		
3.1.	10 pontos	
3.2.	15 pontos	
3.3.	20 pontos	
		45 pontos
4.		
4.1.	25 pontos	
4.2.	15 pontos	
4.3.	15 pontos	
		55 pontos
5.		
5.1.	15 pontos	
5.2.	15 pontos	
		30 pontos
TOTAL		**200 pontos**