GOVERNO DE PORTUGAL
MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA
IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/1.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2014

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

O departamento de *marketing* de uma empresa que se dedica ao fabrico e à venda de gelados dispõe de $16\,500$ euros, por mês, para investir em publicidade. A publicidade será efetuada na rádio e na televisão.

A direção da empresa impôs que o tempo mensal de publicidade a efetuar na rádio seja, pelo menos, o dobro do tempo mensal de publicidade a efetuar na televisão. Além disso, impôs o limite mensal máximo de 600 minutos de publicidade a efetuar na rádio.

Um minuto de publicidade na rádio custa 15 euros e um minuto de publicidade na televisão custa 300 euros.

De acordo com estudos feitos, sabe-se que um minuto de publicidade na rádio garante a venda de 1000 gelados e que um minuto de publicidade na televisão garante a venda de $25\,000$ gelados.

Designe por x o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na rádio e por y o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na televisão.

Determine o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na rádio e o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na televisão, de modo que, nas condições referidas, se garanta a venda do número máximo de gelados.

Na sua resposta, percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

– indicar a função objetivo;
– indicar as restrições do problema;
– representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
– calcular o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na rádio e o número de minutos, por mês, de publicidade a efetuar na televisão, correspondentes à solução do problema.

GRUPO II

Uma empresa de telecomunicações lançou, no mercado português, um novo modelo de telemóvel, designado por MR.

1. Admita que, no ano de 2013, o número, N, em centenas, de telemóveis MR vendidos em Portugal, no dia de ordem x, é dado, aproximadamente, por

$$N(x) = \frac{1950\, e^{-0{,}019x}}{\left(6{,}25\, e^{-0{,}019x} + 1\right)^2} \qquad \text{com } x \in \{1, 2, ..., 365\}$$

Por exemplo, $N(30)$ é o número aproximado, em centenas, de telemóveis MR vendidos em Portugal no dia 30 de janeiro de 2013 (o trigésimo dia do ano).

1.1. De acordo com o modelo apresentado, no ano de 2013, o maior número de telemóveis MR vendidos em Portugal, num só dia, foi 7800 unidades.

Determine, de acordo com este modelo, a diferença entre o maior e o menor número de telemóveis MR vendidos em Portugal, num dia, no ano de 2013.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

1.2. Determine, de acordo com o modelo apresentado, o número de dias do ano de 2013 em que foram vendidos em Portugal menos de 5000 telemóveis MR.

2. O lançamento do telemóvel MR no mercado português realizou-se no ano de 2012.

Seja t a variável que representa o tempo, em meses, decorrido desde as zero horas do dia 1 de janeiro de 2013.

Admita que $G(t)$ é o número aproximado, em centenas, de telemóveis MR vendidos em Guimarães, desde o dia do lançamento até ao instante t, com $t \geq 0$

$G(0)$ é o número aproximado, em centenas, de telemóveis MR vendidos em Guimarães, desde o dia do lançamento até às zero horas do dia 1 de janeiro de 2013.

Na Figura 1, está representada parte do gráfico da função G

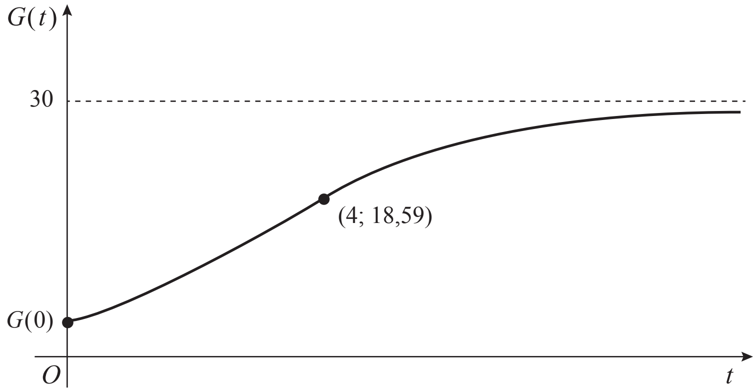

Figura 1

Verifica-se que:

- $G(0) > 3$
- $G(4) \approx 18{,}59$
- a reta de equação $y = 30$ é assíntota horizontal do gráfico da função G

2.1. Existe algum instante t no qual a taxa de variação instantânea da função G seja negativa?

Justifique a sua resposta.

2.2. Admita que, em Faro, o número aproximado, em centenas, de telemóveis MR vendidos, desde o dia do lançamento até ao instante t, é dado por

$$F(t) = G(t) - 3$$

A partir deste modelo, fizeram-se as seguintes afirmações.

I. Desde o dia do lançamento até às zero horas do dia 1 de janeiro de 2013, foram vendidos em Guimarães, no total, mais 300 telemóveis MR do que em Faro.

II. Nos primeiros quatro meses do ano de 2013, foram vendidos em Guimarães cerca de 1859 telemóveis MR.

III. Com o decorrer do tempo, o número de telemóveis MR vendidos em Faro foi aumentando; porém, esse número nunca atingiu 2800 unidades.

Elabore uma pequena composição, na qual justifique que as afirmações I e III são verdadeiras e que a afirmação II é falsa. Apresente uma justificação por cada uma das afirmações.

GRUPO III

As temperaturas máximas e mínimas diárias variam ao longo do ano e consoante o local onde são registadas. Os valores da temperatura dependem de características como a latitude e a altitude dos locais. Também se verificam diferenças quando se comparam conjuntos de anos distintos.

1. Na tabela seguinte, apresentam-se os valores da altitude, em metros, de alguns locais de Portugal onde estão situadas estações meteorológicas. Apresentam-se também os valores, em graus Celsius (ºC), das médias anuais das temperaturas máximas, registadas nessas estações, no período 1971-2000 e no período 2001-2010.

Localização da estação meteorológica	Altitude (metros)	Médias anuais das temperaturas máximas (ºC)	
		1971-2000	2001-2010
Bragança	690	17,9	18,8
Vila Real	481	18,6	18,8
Braga	190	20,0	20,8
Viseu	443	19,6	18,6
Guarda	1019	14,7	15,7
Coimbra	35	21,2	21,2
Castelo Branco	386	21,0	21,5
Santarém	73	22,3	22,8
Portalegre	597	19,5	20,5
Setúbal	35	21,8	22,7
Évora	309	20,7	22,8
Beja	246	22,5	23,0
Faro	8	22,0	22,2

Fontes: www.ine.pt (adaptado), www.ipma.pt (adaptado)
(consultados em setembro de 2013)

1.1. Designe por x a variável «altitude», referente aos locais das estações meteorológicas apresentadas na tabela, e por y a variável «média anual das temperaturas máximas», referente aos mesmos locais, registadas no período 1971-2000.

Na Figura 2, apresentam-se o diagrama de dispersão que relaciona as variáveis x e y e a reta de regressão linear de y sobre x

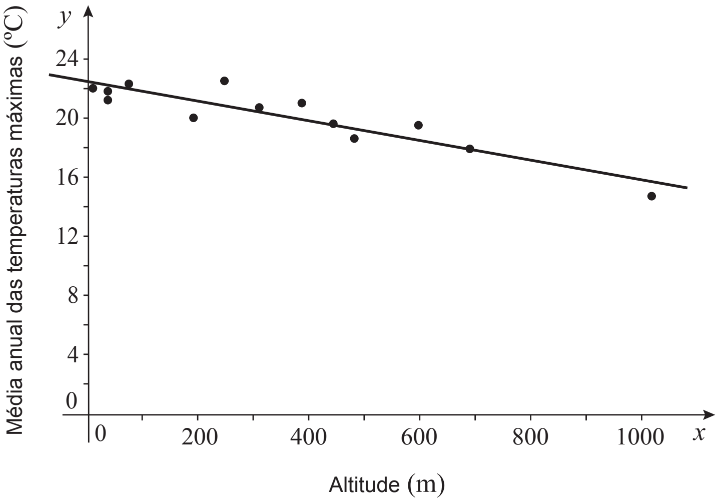

Figura 2

O valor do coeficiente de correlação linear, r, é aproximadamente igual a $-0{,}912$

1.1.1. Justifique que a correlação linear existente entre as variáveis x e y é forte e negativa.

1.1.2. A afirmação seguinte é uma interpretação incorreta do valor de r

O valor de r indica que, quando diminui a média anual das temperaturas máximas, a altitude diminui.

Interprete corretamente, no contexto da situação descrita, o valor de r

1.2. Das estações meteorológicas que constam da tabela, considere aquelas cujas médias anuais das temperaturas máximas são, nos dois períodos indicados, ambas iguais ou superiores a $20{,}0$ ºC

Escolhe-se, ao acaso, uma dessas estações meteorológicas.

Determine a probabilidade de a média anual das temperaturas máximas registadas nessa estação ter subido, pelo menos, $0{,}5$ ºC, do período 1971-2000 para o período 2001-2010.

Apresente o resultado em percentagem.

Na sua resposta, deverá apresentar os casos possíveis e os casos favoráveis.

2. Os meses mais frios em Portugal correspondem aos meses mais quentes em regiões temperadas de países localizados no hemisfério sul, como, por exemplo, o Brasil.

Admita que, no período 1971-2000, a média **mensal** das temperaturas máximas, em graus Celsius, registadas na cidade portuguesa de Bragança, para o mês de ordem t do ano, é dada, aproximadamente, por

$$B(t) = 18{,}48 + 9{,}33\,\mathrm{sen}(0{,}56t - 2{,}5) \quad \text{com} \quad t \in \{1, 2, 3, ..., 12\}$$

Admita ainda que, no mesmo período, a média **mensal** das temperaturas máximas, em graus Celsius, registadas na cidade brasileira de Santana do Livramento, para o mês de ordem t do ano, é dada, aproximadamente, por

$$L(t) = 23{,}37 + 6{,}16\,\mathrm{sen}(0{,}49t + 1{,}23) \quad \text{com} \quad t \in \{1, 2, 3, ..., 12\}$$

O argumento da função seno nas expressões de B e de L está em radianos.

2.1. De acordo com os modelos apresentados, sabe-se que a maior diferença, em valor absoluto, entre as médias mensais das temperaturas máximas registadas nas duas cidades ocorre num dos meses seguintes: janeiro, fevereiro ou dezembro.

Em qual dos três meses referidos ocorre a maior diferença?

Na sua resposta, apresente, para cada um dos três meses, os valores absolutos das diferenças entre as médias mensais das temperaturas máximas registadas nas duas cidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2.2. De acordo com os modelos apresentados, existe algum mês do ano em que as médias mensais das temperaturas máximas registadas nas duas cidades sejam iguais?

Justifique a sua resposta.

Página em branco

GRUPO IV

Desde a antiguidade que o Homem utiliza circunferências e círculos na criação de composições geométricas.

1. Para criar o logotipo de um aldeamento turístico, foi considerada uma sequência de circunferências concêntricas, em que o círculo central é branco e, a partir dele, as regiões exteriores a cada uma das circunferências e interiores à circunferência seguinte são, alternadamente, pretas e brancas, sendo a última preta, tal como sugere a Figura 3.

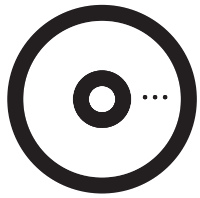

Figura 3

O logotipo foi pintado num dos muros do aldeamento e, tal como a Figura 4 ilustra, consiste num quadrado com duas dessas sequências de circunferências concêntricas, uma das quais dividida em duas partes geometricamente iguais.

De acordo com o esquema representado na Figura 5, verifica-se que o conjunto I, o conjunto II e o conjunto III são tangentes entre si e cada um deles é tangente a dois lados do quadrado que os circunscreve.

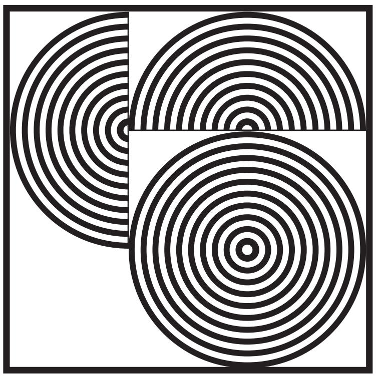

Figura 4

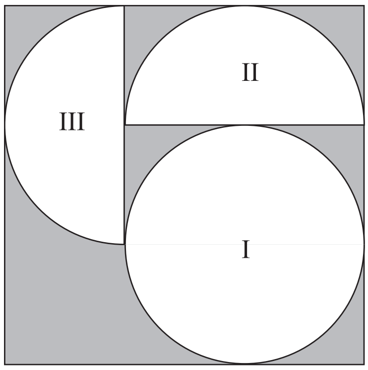

Figura 5

No logotipo pintado no muro do aldeamento:

- o conjunto I tem 20 circunferências concêntricas, que passarão a ser designadas, da menor para a maior: *circunferência um*, *circunferência dois*, ..., *circunferência vinte*;
- os raios dessas circunferências estão em progressão aritmética de razão $5\,\mathrm{cm}$;
- o círculo central do conjunto I, limitado pela *circunferência um*, tem $25\pi\ \mathrm{cm}^2$ de área.

1.1. Determine a área da parte do logotipo pintado no muro do aldeamento correspondente à região exterior aos conjuntos I, II e III, representada a sombreado na Figura 5.

Apresente o resultado em m^2, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

1.2. Relativamente ao conjunto I, designe por A_1 a área do círculo central, por A_2 a área da região exterior à *circunferência um* e interior à *circunferência dois*, e assim sucessivamente, até A_{20}, de acordo com o esquema representado na Figura 6.

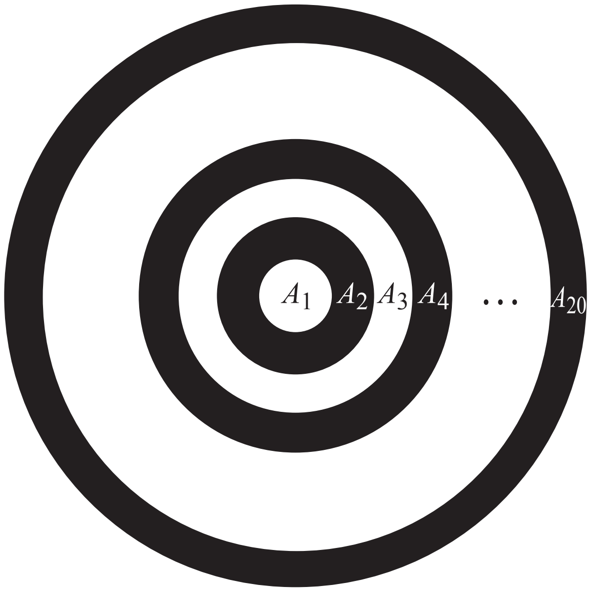

Figura 6

Verifica-se que, no logotipo pintado no muro do aldeamento, os valores correspondentes a $A_1, A_2, A_3, ..., A_{20}$, em cm^2, podem ser obtidos a partir da expressão

$$A_n = 50\pi n - 25\pi$$

1.2.1. Mostre que A_n é termo geral de uma progressão aritmética de razão 50π

1.2.2. Na pintura do logotipo do muro do aldeamento, foram usadas tinta branca e tinta preta, com igual rendimento.

Admita que, para pintar o círculo central do conjunto I, se gastou 1 centilitro de tinta branca.

Determine a quantidade total de tinta preta gasta na pintura dos conjuntos I, II e III do logotipo, admitindo que a quantidade de tinta gasta na pintura de uma região é diretamente proporcional à área dessa região.

Apresente o resultado em litros, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

2. Considere a composição geométrica apresentada na Figura 7.

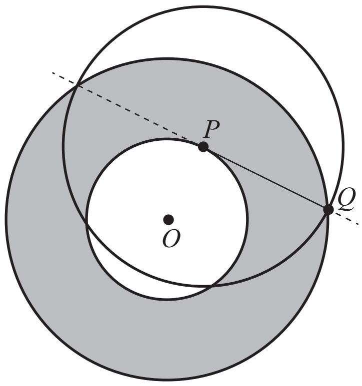

Figura 7

Nesta figura, estão representados:

- duas circunferências concêntricas de centro no ponto O
- o ponto P, pertencente à circunferência de menor raio;
- a reta tangente à circunferência de menor raio, no ponto P
- o ponto Q, um dos pontos de intersecção da reta tangente à circunferência em P com a circunferência de maior raio;
- o segmento de reta $[PQ]$
- a circunferência de centro no ponto P e raio $\overline{PQ}$

Admita que $\overline{OP} = a$ e que $\overline{OQ} = b$

Mostre que a área da coroa circular, representada a sombreado na Figura 7, é exatamente igual à área do círculo de centro no ponto P e raio $\overline{PQ}$

Na sua resposta, poderá ser-lhe útil considerar o triângulo $[OPQ]$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

	30 pontos
	30 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	10 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	20 pontos
	55 pontos

GRUPO III

1.	
1.1.	
1.1.1.	5 pontos
1.1.2.	10 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	15 pontos
	60 pontos

GRUPO IV

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	
1.2.1.	10 pontos
1.2.2.	15 pontos
2.	15 pontos
	55 pontos

TOTAL .... **200 pontos**