EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/1.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\text{Diagonal maior} \times \text{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\text{Base maior} + \text{Base menor}}{2} \times \text{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: *Área da base* × *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Desde muito cedo que o Dinis procura fazer economias, quer poupando, quer investindo as suas poupanças para as rentabilizar.

1. Recentemente, o Dinis decidiu investir parte das suas poupanças em dois produtos financeiros: o *X-fin* e o *Y-fin*.

O Dinis espera vir a ter um lucro anual de 30 euros por cada milhar de euros investido no produto *X-fin* e um lucro anual de 50 euros por cada milhar de euros investido no produto *Y-fin*.

Tendo em conta as suas poupanças, o Dinis impôs os seguintes limites de investimento anual: poderá investir até 4000 euros no produto *X-fin* e poderá investir até 6000 euros no produto *Y-fin*.

O Dinis tem o seguinte sistema de pontuação anual de risco de investimento:

- atribuir 3 pontos de risco de investimento por cada milhar de euros investido no produto *X-fin*;
- atribuir 2 pontos de risco de investimento por cada milhar de euros investido no produto *Y-fin*;
- não ultrapassar 18 pontos de risco de investimento, no total.

Determine o número, x, de milhares de euros que o Dinis deve investir no produto *X-fin* e o número, y, de milhares de euros que o Dinis deve investir no produto *Y-fin*, de modo a maximizar o lucro anual.

Na sua resposta, apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. No dia em que fez dezasseis anos, o Dinis decidiu iniciar uma poupança.

Pensou em duas hipóteses diferentes de a fazer:

- colocar 2 euros num mealheiro vazio e, todos os meses, a partir desse dia, colocar no mealheiro mais 1 euro do que a quantia colocada no mês anterior;
- colocar 15 euros num mealheiro vazio e, todos os meses, a partir desse dia, voltar a colocar 15 euros no mealheiro.

O objetivo do Dinis era juntar, pelo menos, 500 euros.

Qual das duas hipóteses permite concretizar este objetivo mais rapidamente?

Justifique a sua resposta.

3. Quando o Dinis completou o ensino secundário, os pais e os avós deram-lhe algum dinheiro.

O Dinis decidiu rentabilizar esse dinheiro num depósito a prazo, obtendo juros, num regime de juro composto. Neste regime, o juro relativo a um determinado período de tempo é capitalizado, ou seja, é adicionado ao capital existente no início desse período de tempo. Constitui-se, assim, um novo capital, o qual, por sua vez, vai render mais juros, de forma continuada.

Por exemplo: um capital inicial de 100 euros, a uma taxa de juro anual de 2%, com capitalizações anuais, passado um ano, perfaz o capital de 102 euros; passados dois anos, perfaz o capital de $104{,}04$ euros; passados três anos, perfaz o capital de cerca de $106{,}12$ euros; e assim sucessivamente.

Depois de se informar em várias instituições bancárias, o Dinis depositou o dinheiro que tinha recebido dos pais e dos avós numa conta a prazo com uma taxa de juro anual de $1{,}50\%$, com capitalizações anuais.

O Dinis fez alguns cálculos e verificou, corretamente, que, nas condições referidas, seis anos após a data de abertura da conta, o correspondente capital iria perfazer cerca de $1530{,}82$ euros.

Determine a quantia que o Dinis recebeu dos pais e dos avós quando completou o ensino secundário.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

GRUPO II

O crescimento de uma criança ou de um adolescente é um importante indicador do seu desenvolvimento, pelo que parâmetros como a altura e o peso* são periodicamente monitorizados.

* A palavra «peso» é utilizada na sua aceção corrente como sinónimo de massa.

1. A Laura nasceu no dia 1 de junho de 1998.

Admita que, entre os 2 e os 20 anos de idade, o peso da Laura, P, em quilogramas, é dado, em função do tempo, t, aproximadamente, por

$$P(t) = \frac{70}{1 + 8{,}5\, e^{-0{,}22t}} \qquad \text{para } 2 \leq t \leq 20$$

A variável t representa o tempo decorrido, em anos, após o dia 1 de junho de 1998.

Por exemplo, $P(2)$ é, aproximadamente, o peso da Laura, em quilogramas, no dia 1 de junho de 2000.

1.1. Determine, de acordo com o modelo apresentado, durante quanto tempo o peso da Laura esteve compreendido entre 30 e 40 quilogramas, inclusive.

Apresente o resultado em anos e meses, com o número de meses arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1.2. No Boletim de Saúde Infantil e Juvenil, usado em Portugal, são apresentadas curvas de crescimento relativas a crianças e a adolescentes.

Na Figura 1, apresenta-se uma das curvas que constam num boletim e que relaciona a altura, em **centímetros**, com a idade, em anos, de raparigas, dos 5 aos 19 anos de idade.

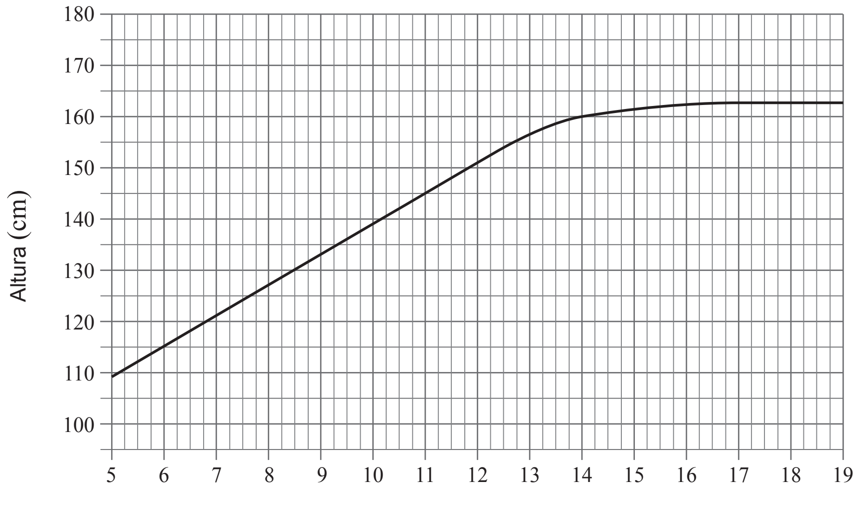

Figura 1

O índice de massa corporal, IMC, é um dos indicadores utilizados para monitorizar o estado de nutrição de uma criança ou de um adolescente. O IMC é dado por

$$IMC = \frac{peso}{(altura)^2}$$

com o peso em quilogramas e a altura em **metros**.

Admita que a altura da Laura, entre os 5 e os 19 anos de idade, é bem modelada pela curva apresentada na Figura 1.

Determine, de acordo com os modelos apresentados, o IMC da Laura no dia 1 de junho de 2012.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. O André também nasceu no dia 1 de junho de 1998.

Na tabela seguinte, apresentam-se registos da altura do André em determinadas idades.

Idade (meses)	72	96	114	120	132	156	180	204	222
Altura (cm)	116,0	127,3	135,2	137,8	143,1	156,0	169,0	175,2	176,4

Admita que a relação entre a altura do André, y, em centímetros, e a sua idade, x, em meses, é bem modelada por uma função logarítmica definida por uma expressão do tipo

$$y = a + b \ln x \quad \text{para} \quad 70 \leq x \leq 225$$

e em que a e b são parâmetros constantes.

Estime a altura do André no dia 1 de dezembro de 2014.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

Na sua resposta:

– recorra à calculadora e utilize a regressão logarítmica para obter uma expressão da função logarítmica que melhor se ajusta aos dados da tabela;

– apresente o valor de a e o valor de b, arredondados às milésimas.

GRUPO III

Numa aula de preparação para o exame de Matemática B, o professor propôs aos alunos atividades destinadas à revisão de diversos conteúdos.

1. Numa das atividades, o professor apresentou os conjuntos I, II, III e IV, cada um com quatro polígonos, alguns dos quais sombreados. Esses conjuntos estão representados na Figura 2.

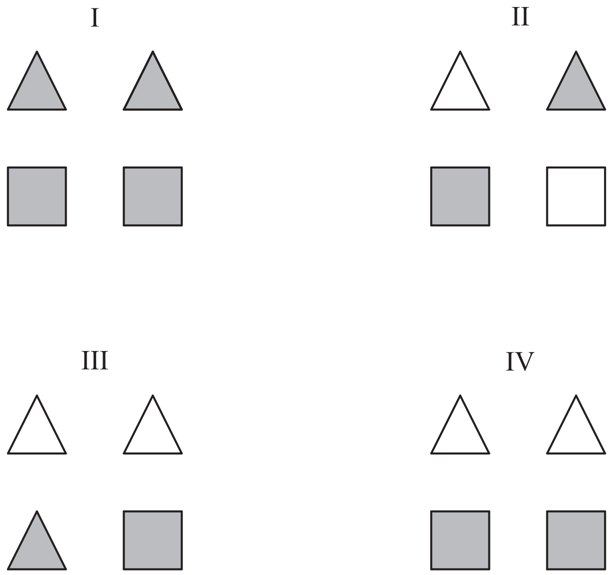

Figura 2

De seguida, o professor apresentou o seguinte problema:

«Estou a pensar num destes quatro conjuntos. Se eu escolher, ao acaso, um polígono do conjunto em que estou a pensar, verifica-se que:

- é tão provável escolher um quadrado como um triângulo;
- o acontecimento "o polígono escolhido está sombreado" não é o acontecimento certo;
- a probabilidade de escolher um quadrado, de entre os polígonos sombreados, é $\frac{1}{2}$

Qual é o conjunto em que estou a pensar?»

Um dos alunos respondeu, corretamente, que o professor estava a pensar no conjunto II.

Numa pequena composição, apresente, para cada um dos conjuntos I, III e IV, a razão pela qual o professor não poderia estar a pensar nesse conjunto.

Na sua resposta, **não** se refira ao conjunto II.

2. Na Figura 3, está representada uma construção geométrica que o professor usou como base para as atividades de revisão. Nesta construção:

- $[OPQR]$ é um quadrado;
- os pontos A, B, C, D, E, F, G e H pertencem aos lados desse quadrado;
- $[OAIH]$ e $[BPCJ]$ são quadrados geometricamente iguais;
- os pontos L e K pertencem à reta GD, que é paralela à reta OP
- $[GLF]$ e $[KDE]$ são triângulos isósceles geometricamente iguais;
- $\overline{GL} = \overline{KD} = \overline{OA}$
- $\overline{AB} = \overline{CD} = \overline{OA}$
- $\overline{RF} = \overline{EQ} = \frac{1}{2}\overline{OA}$

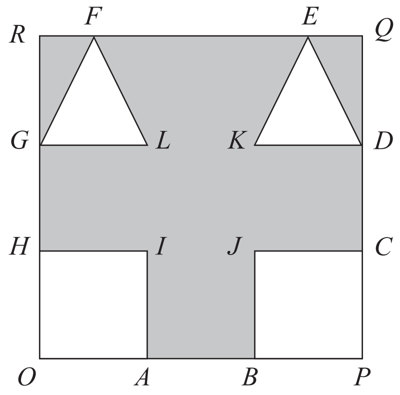

Figura 3

2.1. Mostre que, na construção representada na Figura 3, a área da região sombreada é exatamente igual ao dobro da área da região não sombreada, qualquer que seja o valor de $\overline{OP}$

2.2. Na construção representada na Figura 3, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, xOy, com origem no ponto O, como se ilustra na Figura 4.

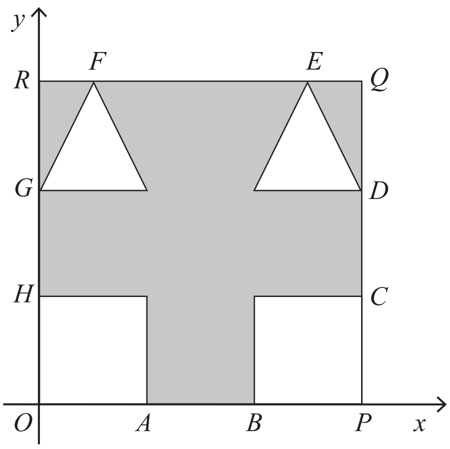

Figura 4

Os segmentos de reta $[OP]$ e $[OR]$ estão contidos nos semieixos positivos Ox e Oy, respetivamente.

Admita que o ponto P tem coordenadas $(3, 0)$

2.2.1. Identifique as coordenadas do ponto simétrico do ponto P em relação à reta OQ

2.2.2. Determine a equação reduzida da reta BC

Na sua resolução, comece por indicar as coordenadas dos pontos B e C

3. Na Figura 5, apresenta-se o diagrama de extremos e quartis relativo ao tempo que os 28 alunos da turma demoraram a realizar as atividades propostas na aula de preparação para o exame.

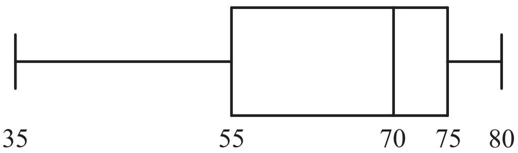

Figura 5

Neste diagrama, os valores indicados, em minutos, correspondem aos extremos e aos quartis.

Admita que nenhum aluno demorou exatamente 70 minutos a realizar as atividades.

Quantos alunos demoraram mais do que 70 minutos a terminar as atividades propostas na aula?

Justifique a sua resposta.

GRUPO IV

No seu movimento em torno do Sol, os planetas descrevem órbitas elípticas, pelo que a distância de cada planeta ao Sol varia ao longo do tempo.

Na órbita de um planeta, o afélio é o ponto em que o planeta se encontra a maior distância do Sol e o periélio é o ponto em que o planeta se encontra a menor distância do Sol.

Na Figura 6, apresenta-se um esquema, que não está à escala, da órbita do planeta Saturno, em que:

- o ponto E representa o Sol;
- o ponto A representa o afélio de Saturno;
- o ponto P representa o periélio de Saturno;
- o ponto S representa a posição de Saturno na sua órbita, num dado instante;
- o ponto E pertence à reta AP
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado AES, cujo lado origem é a semirreta $\dot{E}A$ e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{E}S$, com $x \in [0, 2\pi[$

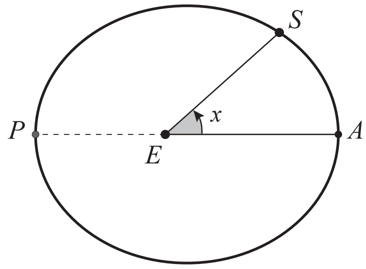

Figura 6

Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, de Saturno ao Sol é dada, em função de x, aproximadamente, por

$$d(x) = \frac{1429}{1 - 0{,}055723\cos(x)} \qquad \text{com } x \in [0, 2\pi[$$

1. De acordo com o modelo apresentado, determine $\overline{AP}$, a distância entre o afélio e o periélio de Saturno.

Apresente o resultado, em milhões de quilómetros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Justifique que, para qualquer valor de x pertencente ao intervalo $]0, \pi[$, se verifica a igualdade

$$d(2\pi - x) = d(x)$$

3. Considere a função, V, que dá a taxa de variação instantânea da função d, para cada valor de x pertencente ao intervalo $[0, 2\pi[$

Interprete, no contexto descrito, o significado de $V\left(\frac{5\pi}{16}\right) \approx -70{,}5$

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1.	30 pontos
2.	15 pontos
3.	10 pontos
	55 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	15 pontos
	45 pontos

GRUPO III

1.	20 pontos
2.	
2.1.	15 pontos
2.2.	
2.2.1.	5 pontos
2.2.2.	10 pontos
3.	10 pontos
	60 pontos

GRUPO IV

1.	20 pontos
2.	10 pontos
3.	10 pontos
	40 pontos

TOTAL .... **200 pontos**