GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/2.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2015

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente feitos a lápis e a seguir passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – *amplitude, em graus, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – *raio*)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – *raio*)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Página em branco

GRUPO I

Existem, desde a antiguidade, referências a devastações de culturas agrícolas causadas por pragas de gafanhotos.

Numa determinada região do Norte de África, em 2004, foi localizado um enxame de gafanhotos.

1. Admita que o número, G, em milhões, de gafanhotos existentes no enxame, x semanas após as zero horas do dia em que este foi localizado, é dado, aproximadamente, por

$$G(x) = 0{,}9(x + 0{,}5)^3 e^{-0{,}6x} \quad \text{com } x \geq 0$$

1.1. Mostre que, de acordo com o modelo apresentado, o número de gafanhotos existentes onze semanas após as zero horas do dia em que o enxame foi localizado era inferior, em cerca de $2{,}37$ milhões de indivíduos, ao número de gafanhotos existentes duas semanas após as zero horas do mesmo dia.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

1.2. Determine durante quanto tempo o número de gafanhotos existentes no enxame foi superior a 6 milhões de indivíduos.

Apresente o resultado em dias, arredondado às unidades.

Na sua resolução, recorra às potencialidades gráficas da sua calculadora.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. Admita que a área, A, em centenas de km^2, da zona agrícola afetada pelo enxame de gafanhotos, x semanas após as zero horas do dia em que este foi localizado, é dada, aproximadamente, por

$$A(x) = \frac{12}{1 + 9{,}5\, e^{-0{,}5x}} \quad \text{com } x \geq 0$$

2.1. Com o decorrer do tempo, e de acordo com o modelo apresentado, poderá a área da zona agrícola afetada pelo enxame de gafanhotos atingir 1400 km^2 ?

Justifique a sua resposta.

2.2. Considere a função, T, que dá a taxa de variação instantânea da função A, para cada valor de x

Interprete, no contexto descrito, o significado de $T(6) \approx 1{,}3$

GRUPO II

O reservatório de um parque industrial tem a forma de um tronco de cone, tal como o que se apresenta na Figura 1.

Admita que o reservatório tem $11{,}2$ metros de altura e que as suas superfícies circulares, na base e no topo, têm de raio, respetivamente, 15 metros e $6{,}6$ metros.

Foi construída uma maquete do reservatório com $11{,}2\ \text{cm}$ de altura e com $15\ \text{cm}$ de raio da base inferior.

Para construir essa maquete, efetuou-se um corte, num cone de revolução, por um plano paralelo à base, como sugere o esquema da Figura 2, que não está desenhado à escala. Neste esquema, h representa a altura do cone que se obteve a partir do corte efetuado e cuja base tem $6{,}6\ \text{cm}$ de raio.

Figura 1

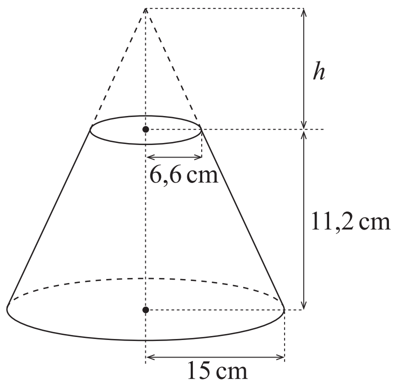

Figura 2

1. Mostre que o valor exato de h é $8{,}8\ \text{cm}$

Na sua resposta, poderá ser-lhe útil considerar a semelhança de triângulos.

2. Aquando das obras de manutenção do parque industrial, foi pintada toda a superfície lateral exterior do reservatório.

Determine a área da superfície pintada do reservatório, sabendo que a área lateral do cone de revolução, antes de se efetuar o corte, é, aproximadamente, $1178\ \text{cm}^2$

Apresente o resultado em metros quadrados, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

3. Na superfície lateral do reservatório, foram pintadas 27 circunferências, de espessura desprezável, contidas em planos paralelos equidistantes, como o esquema da Figura 3 ilustra.

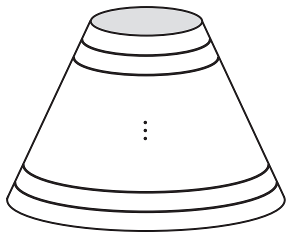

Figura 3

A Figura 4 apresenta a vista de cima do reservatório, na qual estão representadas, no mesmo plano, algumas dessas circunferências.

Sabe-se que a menor circunferência pintada no reservatório tem $6{,}9\,\mathrm{m}$ de raio e que cada circunferência, da menor para a maior, tem mais $0{,}3\,\mathrm{m}$ de raio do que a circunferência anterior.

Os perímetros das 27 circunferências pintadas no reservatório, da menor para a maior, são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

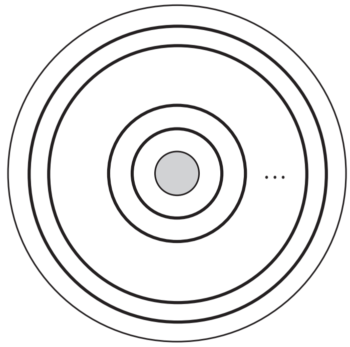

Figura 4

3.1. Mostre que a razão dessa progressão é exatamente $0{,}6\,\pi$ metros.

3.2. Determine a soma dos perímetros das 27 circunferências pintadas no reservatório.

Apresente o resultado em metros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4. Admita que, no cone de revolução representado no esquema da Figura 2, se fixa um referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, em que:

- a origem do referencial, O, coincide com o centro da base;
- o semieixo positivo das cotas é a semirreta $\dot{O}V$, sendo V o vértice do cone.

A Figura 5 representa esse referencial fixado no cone de revolução.

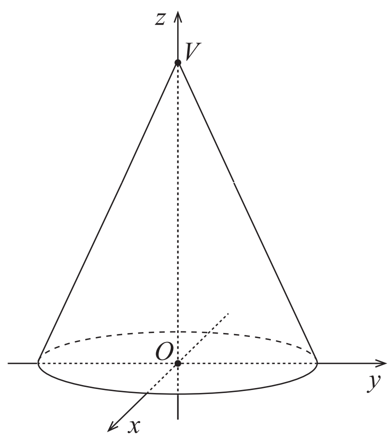

Figura 5

Neste referencial, o ponto V tem cota 20

Identifique as coordenadas do ponto simétrico do ponto V, relativamente ao plano xOy

GRUPO III

A Helena e o Samuel foram andar de baloiço no parque. Cada um deles escolheu um baloiço diferente.

1. Admita que, em cada instante, a distância do baloiço da Helena ao chão é medida a partir da extremidade inferior de uma das correntes que ligam o assento do baloiço à estrutura, conforme se ilustra na Figura 6.

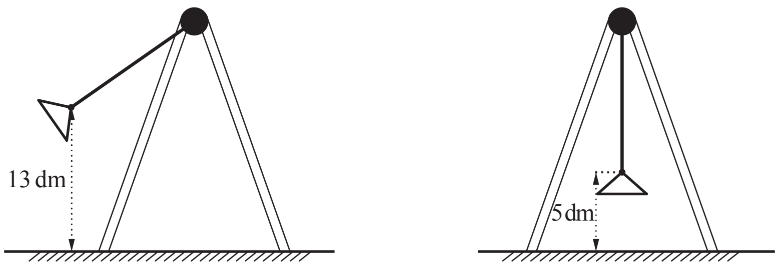

Figura 6

Nessa figura, encontram-se duas posições do baloiço da Helena no seu movimento: uma relativa à posição em que a distância do baloiço ao chão é máxima e a outra relativa à posição em que a distância do baloiço ao chão é mínima.

Na Figura 7, na qual se apresenta um esquema dessas duas posições, todos os pontos pertencem ao mesmo plano vertical. Os segmentos de reta $[AB]$ e $[AC]$ representam uma das correntes que ligam o assento do baloiço à estrutura nas duas posições referidas. A reta horizontal s representa o nível do chão.

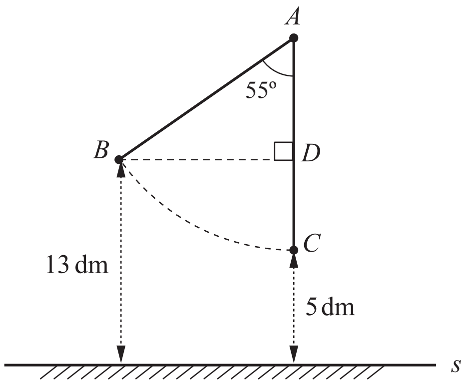

Figura 7

Sabe-se que:

- o ponto B dista 13 dm da reta s
- o ponto C dista 5 dm da reta s
- o ponto D é o ponto de $[AC]$, tal que $B\hat{D}A = 90^{\circ}$
- $B\hat{A}D = 55^{\circ}$

Determine o comprimento da corrente do baloiço.

Apresente o resultado em decímetros, arredondado às décimas.

Na sua resposta, tenha em consideração que $\overline{AB} = \overline{AC}$

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. A função H dá a distância, em decímetros, do baloiço da Helena ao chão t segundos após o início do movimento, com $0 \leq t \leq 18$

Na Figura 8, está representado o gráfico da função H

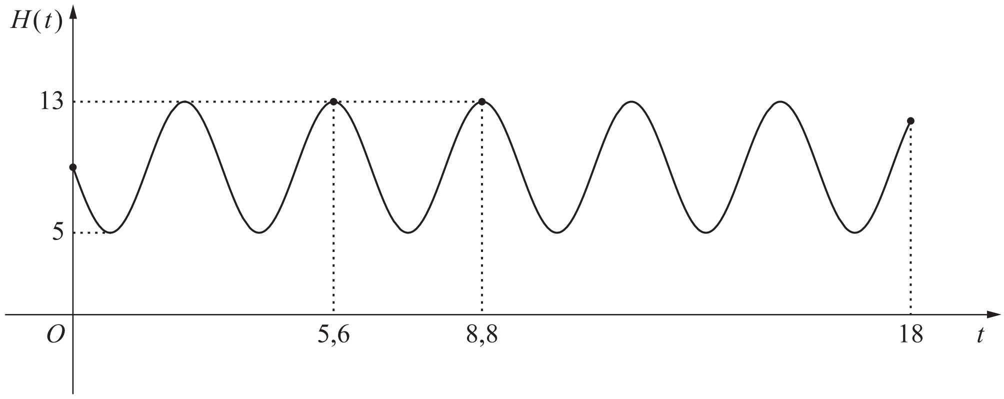

Figura 8

Tal como a figura ilustra:

- 5 e 13 são, respetivamente, o valor mínimo e o valor máximo absolutos da função H
- $5{,}6$ e $8{,}8$ são dois maximizantes consecutivos da função H

Admita que a função H pode ser definida por

$$H(t) = 9 - a\,\mathrm{sen}(0{,}625\pi t) \quad \text{com } t \in [0;\, 18]$$

em que a é uma constante real positiva.

O argumento da função seno está em radianos.

Sabe-se que o Samuel e a Helena começaram a andar de baloiço com alguns segundos de diferença.

Admita que a distância, S, em decímetros, do baloiço do Samuel ao chão, t segundos depois de a Helena ter começado a andar de baloiço, é dada por

$$S(t) = H(t - 12) \quad \text{com } t \in [12;\, 30]$$

Elabore uma pequena composição, na qual:

– identifique, justificando, o valor de a na expressão analítica da função H

– interprete, no contexto descrito, o significado da igualdade $H(t + 3{,}2) = H(t)$, com $t \in [0;\, 14{,}8]$

– interprete, no contexto descrito, o significado do valor -12 na expressão analítica da função S

GRUPO IV

Em Portugal, durante o inverno, é frequente verificar-se a ocorrência de intempéries, com elevados valores de precipitação, que afetam de modo significativo as culturas agrícolas.

1. Os terrenos de produção agrícola de uma certa empresa situam-se numa região de Portugal habitualmente fustigada por intempéries. Devido aos prejuízos sofridos no presente ano agrícola, essa empresa decidiu candidatar-se a um subsídio governamental destinado à produção e a um subsídio europeu destinado à renovação de estruturas para o próximo ano agrícola.

Esses subsídios destinam-se ao cultivo de trigo e de vinha.

A empresa dispõe de uma área de 100 hectares de cultivo e tem a garantia de conseguir vender toda a produção obtida, em cada ano agrícola.

Para que qualquer dos subsídios seja atribuído à empresa, é exigido que:

- pelo menos 20 hectares de cultivo sejam de trigo;
- pelo menos 10 hectares de cultivo sejam de vinha.

O subsídio governamental, no valor total máximo de $150\,000$ euros, é de:

- 2000 euros por cada hectare de cultivo de trigo;
- 1000 euros por cada hectare de cultivo de vinha.

O subsídio europeu, no valor total máximo de $205\,000$ euros, é de:

- 3000 euros por cada hectare de cultivo de trigo;
- 1000 euros por cada hectare de cultivo de vinha.

No caso de receber os dois subsídios aos quais se candidata, prevê-se que a empresa obtenha o lucro anual de 1500 euros por cada hectare de trigo cultivado e o lucro anual de 3000 euros por cada hectare de vinha cultivada.

Determine a área, x, em hectares, que a empresa deve reservar para o cultivo de trigo e a área, y, em hectares, que a empresa deve reservar para o cultivo de vinha, referentes ao próximo ano agrícola, de modo que, caso receba os dois subsídios, a empresa obtenha, nesse ano, o lucro máximo.

Na sua resposta, apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

2. Uma das estações meteorológicas em que se registam os valores mais elevados de precipitação total anual em Portugal é a de Viana do Castelo.

2.1. Ao ler o diário que escreveu ao longo de um determinado ano dos seus tempos de juventude, a Edite encontrou, na página relativa a um dos primeiros quinze dias do mês de dezembro desse ano, passados em Viana do Castelo, a seguinte frase:

Esta manhã, o vento parou de soprar, mas está a chover.

Sabe-se que, nos primeiros quinze dias desse mês de dezembro, não choveu em Viana do Castelo apenas em cinco dias.

O estado do tempo em Viana do Castelo, nesse período, está ilustrado na Figura 9.

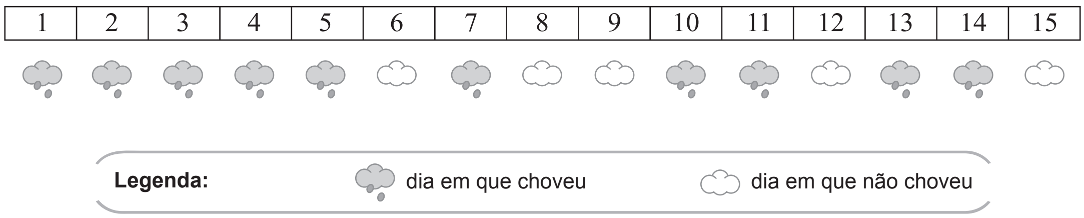

Figura 9

Qual é a probabilidade de ter chovido no dia seguinte ao dia em que foi escrita a frase encontrada pela Edite?

Na sua resposta, identifique os dias do mês que correspondem aos casos possíveis e os dias do mês que correspondem aos casos favoráveis.

2.2. Relativamente aos valores de precipitação total anual registados na estação meteorológica de Viana do Castelo, no período 2010-2013, verifica-se que:

- a média dos valores de precipitação total anual, nesses quatro anos, é $1270{,}125\ \mathrm{mm}$ e a mediana é $1314{,}350\ \mathrm{mm}$
- desses quatro anos, 2012 foi o ano de menor precipitação total anual e 2013 foi o ano de maior precipitação total anual.

Determine a média, em mm, dos valores de precipitação total anual dos últimos dois anos desse período de tempo, 2012 e 2013.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1.		
1.1.	....	15 pontos
1.2.	....	20 pontos
2.		
2.1.	....	10 pontos
2.2.	....	10 pontos
		55 pontos

GRUPO II

1.	....	10 pontos
2.	....	15 pontos
3.		
3.1.	....	10 pontos
3.2.	....	15 pontos
4.	....	5 pontos
		55 pontos

GRUPO III

1.	....	10 pontos
2.	....	20 pontos
		30 pontos

GRUPO IV

1.	....	30 pontos
2.		
2.1.	....	15 pontos
2.2.	....	15 pontos
		60 pontos

TOTAL .... **200 pontos**