REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 835/1.ª Fase

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nos termos da lei em vigor, as provas de avaliação externa são obras protegidas pelo Código do Direito de Autor e dos Direitos Conexos. A sua divulgação não suprime os direitos previstos na lei. Assim, é proibida a utilização destas provas, além do determinado na lei ou do permitido pelo IAVE, I.P., sendo expressamente vedada a sua exploração comercial.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Teoria matemática das eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

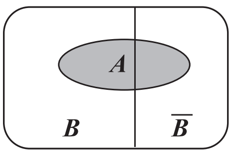
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

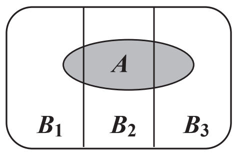
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Distribuição normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left]\overline{x}-z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x}+z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x}-z\dfrac{s}{\sqrt{n}}\,,\ \overline{x}+z\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\hat{p}-z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\,,\ \hat{p}+z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

1. Num determinado dia da próxima edição do festival de música MaréFest, vão atuar no palco principal as bandas A, B, C e D. Numa ação de campanha publicitária, os organizadores puseram à votação do público a ordem pela qual as bandas deveriam atuar. A votação decorreu *on-line*.

Ao votar, cada internauta tinha de dispor os nomes das bandas, A, B, C e D, de acordo com a ordem pela qual gostaria de as ver atuar, validando a seguir o seu voto. A votação encerrou quando foram apurados os votos dos primeiros mil internautas.

A Tabela 1 apresenta as preferências de 900 desses 1000 internautas.

Tabela 1

N.º de votos / Preferências	200	400	300
1.ª	A	B	C
2.ª	B	A	D
3.ª	C	C	B
4.ª	D	D	A

Os 100 internautas restantes votaram todos numa mesma ordenação das quatro bandas, sendo essa ordenação diferente das três constantes da Tabela 1.

Concluída a votação, os organizadores aplicaram o método a seguir descrito para tomarem a decisão final.

- São atribuídos pontos a cada uma das bandas em função do seu lugar na ordem de preferência. Cada banda recebe:
    - quatro pontos por cada voto na primeira preferência;
    - três pontos por cada voto na segunda preferência;
    - dois pontos por cada voto na terceira preferência;
    - um ponto por cada voto na quarta preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada uma das bandas.
- Ordenam-se as bandas, por ordem decrescente de pontuação, e será essa a ordem de atuação, ou seja, atua em primeiro lugar a banda mais votada.
- Em caso de empate, caberá aos elementos da organização escolher a ordem de atuação das bandas empatadas.

Demonstre que as afirmações seguintes são falsas, justificando a sua resposta.

I – A banda C poderá atuar em primeiro lugar.

II – Nunca haverá bandas com o mesmo número de pontos.

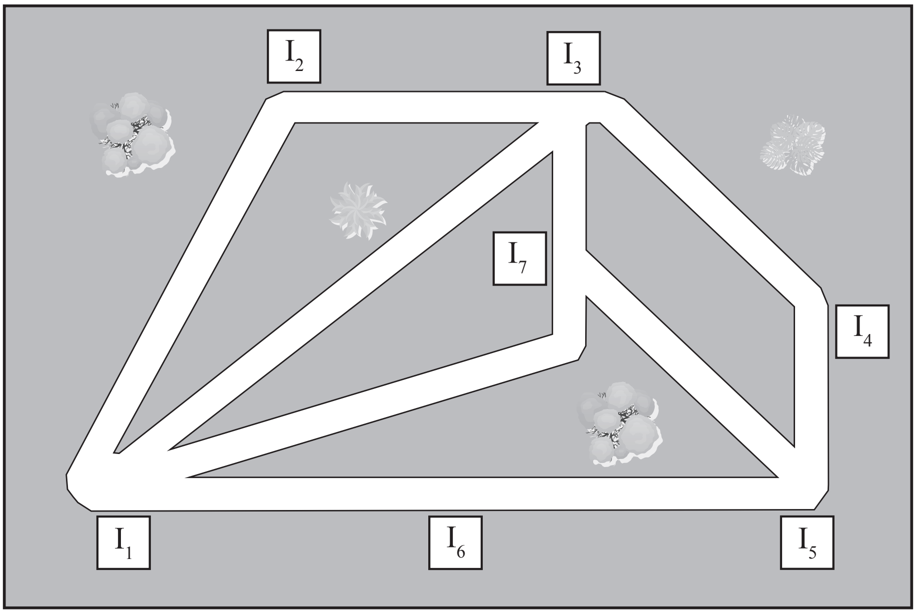
Na sua resposta, apresente:

– a pontuação de cada banda, resultante da aplicação do método acima descrito aos votos registados na Tabela 1.

– para cada uma das afirmações, um exemplo que a contrarie e que resulte das votações possíveis dos 100 internautas cujas preferências se desconhecem.

2. Na Figura 1, apresenta-se um mapa do recinto do MaréFest no qual estão representadas as infraestruturas I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 e I_7, ligadas entre si através de troços pedonais.

Figura 1



Considera-se troço pedonal a ligação entre duas infraestruturas adjacentes, isto é, o percurso que pode ser usado para ir de uma dessas infraestruturas à outra sem passar por mais nenhuma.

Um vigilante do recinto pretende vistoriar as condições de segurança de todos os troços pedonais, iniciando e terminando a sua vistoria junto da mesma infraestrutura. Observando o mapa, conclui que não será possível, nestas condições, percorrer todos os troços pedonais sem repetir nenhum.

Apresente uma sugestão de um único troço pedonal a repetir pelo vigilante, que lhe permita percorrer todos os troços, iniciando e terminando a vistoria junto da mesma infraestrutura, sendo o número de troços a percorrer o menor possível.

Na sua resposta, apresente:

– um grafo que modele o mapa do recinto com as infraestruturas, de I_1 a I_7, e com os troços pedonais.

– uma justificação da veracidade da conclusão do vigilante.

3. A organização do MaréFest contrata o aluguer do palco principal, durante seis dias, a uma empresa.

O custo do aluguer do palco resulta da soma de três valores:

- a taxa diária de utilização (U);
- a deslocação do equipamento (D);
- a montagem e a desmontagem do palco (M).

Os valores de U, D e M são calculados do seguinte modo:

$$\boxed{U = 1250\ € \times n.^{\text{o}}\ de\ dias}$$

$$\boxed{D = n.^{\text{o}}\ de\ km \times valor\ do\ km}$$

Os primeiros 30 km são pagos a 25 € por km.

Os restantes, caso existam, são pagos a $27{,}5$ € por km.

$$\boxed{M = n.^{\text{o}}\ de\ funcionários \times n.^{\text{o}}\ de\ horas \times valor\ de\ cada\ hora}$$

O valor de cada hora, indicado na Tabela 2, depende do número de horas e do número de funcionários necessários para montar e desmontar o palco.

Tabela 2

N.º total de funcionários \ N.º total de horas	$]0, 4]$	$]4, 7]$	$]7, 10]$
1 - 5	100 €	120 €	130 €
6 - 10	140 €	150 €	170 €
11 - 15	190 €	210 €	250 €

No orçamento apresentado, a empresa prevê uma deslocação de 50 km e considera necessários 8 funcionários e um total de 5 horas para montagem e desmontagem do palco principal.

Determine o custo total, em euros, do aluguer do palco principal.

4. Uma área do recinto do MaréFest será dividida por cinco dos seus patrocinadores, para promoção dos seus produtos. Os cinco representantes dos patrocinadores, Santos, Fernão, Barros, Lemos e Gomes, acordaram entre si que o algoritmo a seguir descrito proporcionaria uma divisão justa dessa área.

1.º passo: Atribui-se, aleatoriamente, uma ordem aos representantes. Considere-se que a ordem atribuída foi A, B, C, D e E.

2.º passo: O representante A escolhe uma parcela do recinto que considera corresponder a $\frac{1}{5}$ do total.

3.º passo: O representante B pronuncia-se, concordando com a divisão efetuada ou dela discordando:

- se considera que a parcela escolhida pelo representante A é $\frac{1}{5}$ do recinto (ou menos), passa a vez ao representante seguinte;
- se considera que a parcela escolhida pelo representante A é mais do que $\frac{1}{5}$ do recinto, retifica (retirando-lhe uma parte) e passa a vez ao representante seguinte.

4.º passo: O representante C repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao representante D.

5.º passo: O representante D repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao representante E.

6.º passo: O representante E procede também como se indica no 3.º passo e atribui a parcela resultante de todo este processo ao último representante que a retificou, ou, se ninguém a tiver retificado, entrega-a ao representante A.

Termina assim a primeira volta.

7.º passo: A segunda volta começa com o que resta do recinto e com menos um representante (aquele que recebeu a sua parcela no passo anterior) e inicia-se no representante a seguir ao que acabou de receber a parcela na volta anterior.

8.º passo: Realizam-se as voltas necessárias até que restem apenas dois representantes. Quando isso acontecer, um divide e o outro escolhe.

A ordem para a divisão do recinto, atribuída aleatoriamente, foi Barros, Fernão, Gomes, Lemos e Santos.

Na primeira volta, apenas Gomes retificou a parcela do recinto, na segunda ninguém o fez e na terceira volta retificaram Fernão e Barros.

Identifique, justificando, os representantes a quem foram atribuídas parcelas do recinto nas primeiras três voltas.

5. Na primeira noite do MaréFest, depois de terminarem os concertos no palco principal, a assistência dividiu-se pelas tendas Tecno, Dance e Chill.

Na Tabela 3, apenas estão registados os números relativos às presenças nas tendas Dance e Chill.

Tabela 3

	Homens	**Mulheres**
Tenda Dance	1540	2720
Tenda Chill	840	680

5.1. Escolhem-se aleatoriamente duas pessoas, uma a seguir à outra, de entre as contabilizadas na Tabela 3.

Determine a probabilidade de ambas estarem na tenda Dance.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

5.2. Nessa noite, a afluência à tenda Tecno correspondeu a 20% do total das pessoas que se dividiram pelas três tendas. Das pessoas que estiveram na tenda Tecno, $\frac{3}{5}$ eram mulheres.

Quantos homens estiveram na tenda Tecno, nessa noite?

5.3. Tendo por referência o número de pessoas presentes na tenda Chill, na primeira noite do MaréFest, construa um intervalo de confiança a 90% para a proporção de mulheres presentes, por dia, na tenda Chill, no decurso do festival.

Relativamente aos valores dos extremos do intervalo, apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

6. A realização do MaréFest obriga à presença de elementos da organização no recinto do festival além dos dias em que as portas estão abertas ao público.

O número de elementos da organização presentes no recinto ao longo de quinze dias, na edição do MaréFest de 2010, está parcialmente registado no diagrama de caule-e-folhas da Figura 2. O algarismo das dezenas de cada registo é indicado no caule, e o algarismo das unidades é indicado nas folhas.

Figura 2

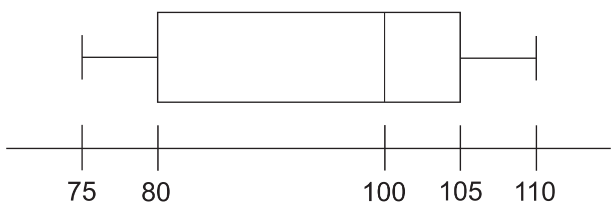
7	5	7	7		
8	0	0	3	a	8
9	3	9			
10	0	0	2	5	5

6.1. Determine o valor de a para que o número médio de elementos da organização presentes, por dia, nessa edição do MaréFest, seja 90.

6.2. Considere agora que $a = 8$.

Tendo por base os dados referentes ao número de elementos da organização presentes, por dia, no recinto, na edição do MaréFest de 2011, construiu-se o diagrama de extremos e quartis apresentado na Figura 3.

Figura 3



Comente a afirmação seguinte.

Os dados relativos ao número de elementos da organização presentes, por dia, no recinto do MaréFest situados entre o 1.º quartil e a mediana estão mais concentrados na amostra referente à edição de 2010 do que na amostra referente ao ano de 2011.

Na sua resposta, apresente:

– os valores do 1.º quartil e da mediana das distribuições de 2010 e de 2011.

7. A rádio oficial do MaréFest transmite em direto a partir do recinto do festival. Uma das transmissões em direto iniciou-se às 20h00 e teve a duração de seis horas.

Das pessoas que ouviam rádio nessa noite, a percentagem de ouvintes da rádio oficial do MaréFest ao longo do programa, t horas após o início da transmissão, é dada por

$$r(t) = 14{,}8 + 0{,}7e^{0{,}6t}, \text{ com } 0 \leq t \leq 6$$

7.1. Qual foi a percentagem de ouvintes da rádio oficial do MaréFest às 22h00?

Apresente a resposta arredondada às décimas.

7.2. No início da atuação da banda principal, a percentagem de ouvintes da rádio oficial era de, aproximadamente, $25{,}2\%$, tendo aumentado 13 pontos percentuais até ao final da atuação da banda.

Determine a hora de início e a hora de conclusão da atuação da banda principal.

Apresente o resultado em horas e minutos, arredondados às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o gráfico visualizado;

– as coordenadas de pontos relevantes arredondadas às décimas.

FIM

COTAÇÕES

Item Cotação (em pontos)											TOTAL
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	
25	20	15	15	15	20	20	15	20	15	20	**200**

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

1.ª Fase