REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 835/2.ª Fase

14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Teoria matemática das eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

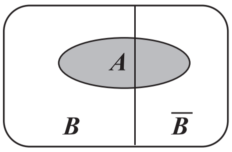
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

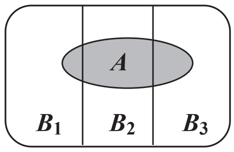
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Distribuição normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x}-z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x}+z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x}-z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x}+z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p}-z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p}+z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

Página em branco

Na resposta a cada item, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos recolhidos na sua utilização.

1. No Sport Clube Caravelas (SCC), estão a decorrer eleições para eleger a assembleia-geral, que é constituída por 12 elementos.

Na abertura do processo eleitoral, apresentaram-se à votação quatro listas, W, X, Y e Z. A Tabela 1 apresenta o número de votos validamente expressos em cada uma das listas.

Tabela 1

Lista	**W**	**X**	**Y**	**Z**
N.º de votos	498	100	804	98

Para converter os votos em mandatos, aplicou-se o método a seguir descrito.

1.º passo: Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de votos pelo número de mandatos.

2.º passo: Calcula-se a quota padrão, dividindo-se o número de votos que cada uma das listas teve pelo divisor padrão.

3.º passo: Atribui-se a cada lista uma quota arredondada igual ao resultado da adição de 1 com o maior número inteiro menor do que a quota padrão.

4.º passo: Se a soma das quotas arredondadas for igual ao número de mandatos a atribuir, o método dá-se por finalizado e assume-se que o número de mandatos de cada lista é igual ao valor da quota arredondada. Caso contrário, é necessário encontrar um divisor modificado:

- se a soma das quotas arredondadas for superior ao número de mandatos a atribuir, adiciona-se um múltiplo de 10 ao divisor padrão;
- se a soma das quotas arredondadas for inferior ao número de mandatos a atribuir, subtrai-se um múltiplo de 10 ao divisor padrão.

O divisor modificado irá substituir o divisor padrão, de modo a calcular a quota modificada de cada lista.

5.º passo: Repetem-se os três passos anteriores até se obter uma soma das quotas modificadas arredondadas que seja igual ao número de mandatos a distribuir, atribuindo-se a cada lista um número de mandatos igual à respetiva quota modificada arredondada.

Apresente a constituição da assembleia-geral do SCC resultante da aplicação do método descrito.

Na sua resposta, apresente os valores das quotas padrão e das quotas modificadas, caso seja necessário determiná-los, com arredondamento às centésimas.

2. De dois em dois anos, o SCC participa no Encontro Desportivo Internacional, que, em 2016, se realiza em Pracóvia.

Na cerimónia de abertura do encontro, cada clube participante é representado por um atleta que desfila levando o seu estandarte.

Quatro dos atletas mais antigos do SCC, Eduarda (E), Francisco (F), Gabriela (G) e Henrique (H), são candidatos a porta-estandarte. Para selecionar o candidato que será porta-estandarte, os elementos dos órgãos diretivos do clube votam nos quatro candidatos por ordem de preferência.

Foram apurados 47 votos válidos, cujos resultados estão registados na Tabela 2.

Tabela 2

N.º de votos / Preferência	**11**	**14**	**7**	**6**	**9**
1.ª	F	G	E	F	H
2.ª	G	H	H	E	G
3.ª	E	E	F	H	F
4.ª	H	F	G	G	E

A seleção do candidato resulta da aplicação do método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de primeiras preferências de cada candidato e verifica-se se algum deles obtém a maioria absoluta na primeira preferência. Caso isso se verifique, esse candidato é o vencedor.
- Caso contrário, elimina-se o candidato menos votado na primeira preferência e a tabela de preferências é reestruturada, passando a incluir menos um candidato. Os candidatos nas preferências imediatamente a seguir vão ocupar o lugar vazio deixado pelo candidato eliminado.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à tabela de preferências obtida no ponto anterior.
- O processo repete-se até que um dos candidatos obtenha a maioria absoluta na primeira preferência.

Verifique, justificando, se o candidato declarado vencedor, por aplicação do método descrito, foi o que teve maior número de votos na primeira preferência.

Na sua resposta, apresente todos os cálculos efetuados.

3. No Encontro Desportivo Internacional, existem atletas que estão inscritos em mais do que uma modalidade. Para que todos consigam realizar um treino de adaptação ao estádio onde se irão realizar as provas, vai ser criado um horário com blocos de utilização das instalações. De cada bloco deverão fazer parte as modalidades nas quais não haja atletas inscritos simultaneamente.

A constituição de cada bloco será definida considerando os dados da Tabela 3, na qual o símbolo × indica as modalidades que podem ser inseridas num mesmo bloco.

Tabela 3

Modalidades	A	B	C	D	E	F	G	H
A			×	×		×		
B							×	
C	×					×		
D	×							×
E								
F	×		×					
G		×						
H				×				

Determine, tendo em conta as condições dadas, o número mínimo de blocos que será necessário constituir, de modo que todos os atletas possam realizar o treino de adaptação em todas as modalidades em que estão inscritos.

Na sua resposta:

– apresente um grafo que modele a situação;

– identifique as modalidades que constituem cada um dos blocos.

4. Sempre que ocorre uma final de qualquer modalidade de ginástica, é necessário selecionar um júri. Esse júri, específico de cada modalidade, é constituído por vários jurados, escolhidos a partir de um universo de candidatos classificados, de acordo com a sua idade, em juniores ou em seniores.

4.1. Para a final de saltos de trampolim, os jurados serão selecionados de entre o universo de candidatos apresentado na Tabela 4, em que a e b representam números naturais.

Tabela 4

	Júnior	**Sénior**
Homem	7	a
Mulher	4	b

Admita que, escolhendo um candidato ao acaso:

- a probabilidade de ser sénior, sabendo que é mulher, é $\frac{1}{5}$;
- a probabilidade de ser homem, sabendo que é sénior, é $\frac{4}{5}$.

Determine o número de candidatos seniores.

4.2. Para a final de ginástica no solo, os jurados serão selecionados, de forma aleatória, de entre o universo de candidatos apresentado na Tabela 5.

Tabela 5

	Júnior	**Sénior**
Homem	10	6
Mulher	4	10

O júri desta modalidade é constituído por seis jurados.

Admita que, de entre os candidatos, foram selecionados quatro juniores e um sénior, faltando selecionar o sexto jurado.

Seja X a variável aleatória: «número de juniores que fazem parte do júri».

Construa uma tabela de distribuição de probabilidades da variável X.

Apresente o valor das probabilidades na forma de fração irredutível.

5. No mercado cambial, a compra e a venda de moeda estrangeira está sujeita ao câmbio no momento em que a transação se efetua.

Em Pracóvia, a moeda oficial é abreviadamente designada por PRC.

De acordo com informação recolhida no mercado, o modelo v, válido para o mês de janeiro de 2015, dá-nos o valor em euros de cada PRC, t dias após as zero horas do dia 1 de janeiro de 2015, e é definido por

$$v(t) = \frac{1{,}85}{1 + 12e^{-0{,}33t}} \text{ , com } 0 \leq t < 31$$

5.1. Às 12 horas do dia 15 de janeiro de 2015, numa agência bancária de Pracóvia, o Francisco quis trocar euros por PRC, de modo a obter 1500 PRC.

Determine, de acordo com o modelo apresentado, a quantia em euros que o Francisco teve de trocar.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

5.2. A Gabriela e o Henrique estiveram em Pracóvia no mês de janeiro de 2015, tendo estado juntos apenas em parte da sua estada. Posteriormente, encontraram-se e conversaram sobre os gastos efetuados. A Gabriela comentou que, durante a sua estada, o câmbio estivera sempre acima de $0{,}75$ euros, e o Henrique lembrava-se de que, durante a sua estada, o câmbio estivera sempre abaixo de $1{,}5$ euros.

Será possível que os dois amigos tenham estado em Pracóvia, simultaneamente, durante dez dias consecutivos?

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o gráfico visualizado;

– as coordenadas de pontos relevantes arredondadas às centésimas.

6. A maratona é a última prova em diversos encontros desportivos.

Existem diversos estudos estatísticos sobre esta prova, que envolvem dados como o tempo de conclusão da prova, a frequência cardíaca dos atletas no final da prova ou as condições climatéricas.

6.1. Na Tabela 6, estão parcialmente registados os dados referentes à frequência cardíaca do atleta vencedor da maratona, no momento em que acaba a prova, nas edições do Encontro Desportivo Internacional dos últimos dez anos.

Sabe-se ainda que:

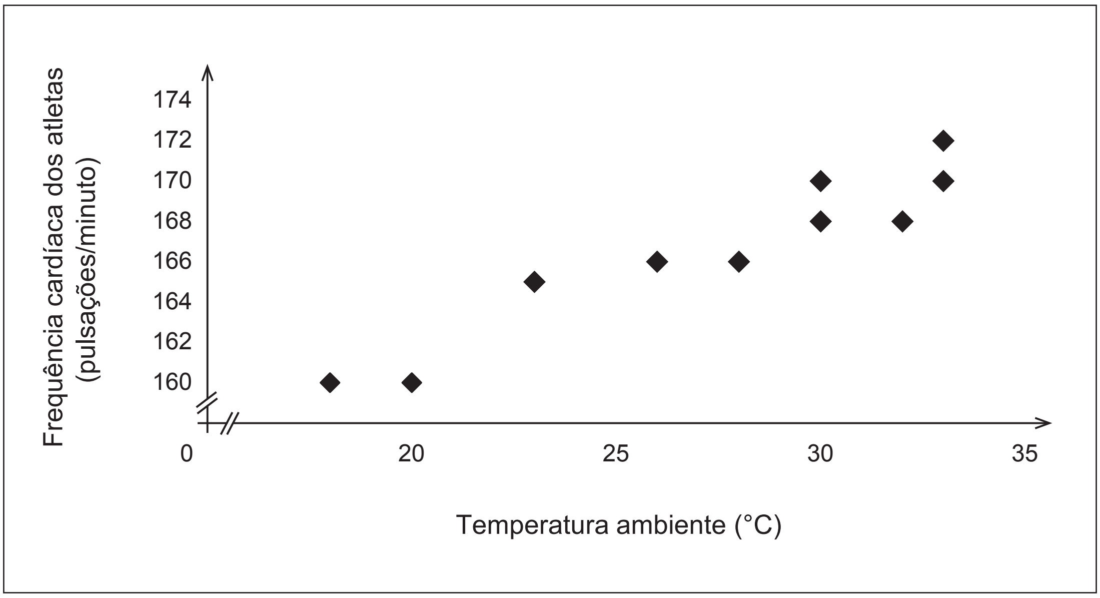
- a média dos valores constantes da Tabela 6 é $166{,}5$;
- P representa as pulsações por minuto do atleta que venceu a maratona na edição de 2012.

Tabela 6

Ano	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Frequência cardíaca (pulsações/minuto)	165	166	166	168	170	170	P	160	160	168

Na Figura 1, está representado o diagrama de dispersão da temperatura ambiente, em graus Celsius ($^\circ C$), e da frequência cardíaca, em pulsações por minuto, dos atletas referidos na Tabela 6, no final da prova.

Figura 1



6.1.1. Considere as seguintes afirmações.

O atleta vencedor em 2012 terminou a maratona com uma frequência cardíaca entre 169 e 171 pulsações por minuto.

A mediana das frequências cardíacas é 170 pulsações por minuto.

O coeficiente de correlação linear entre a temperatura ambiente e a frequência cardíaca dos atletas pode ser –0,85.

Elabore uma pequena composição na qual justifique, com base nos dados apresentados, que as três afirmações são falsas.

6.1.2. A reta de equação $y = 0{,}71x + 147{,}1$ é a que melhor se ajusta ao diagrama de dispersão apresentado na Figura 1, em que y representa a frequência cardíaca do atleta vencedor, em pulsações por minuto, e x representa a temperatura ambiente no final da prova, em $°\mathrm{C}$.

Conclua, atendendo à reta ajustada ao diagrama, se $31{,}7\ °\mathrm{C}$ será um valor admissível da temperatura ambiente registada no final da maratona, no ano de 2006.

6.2. Um entusiasta da maratona publicou no seu blogue um artigo intitulado *«Nos últimos dez anos, o tempo médio de duração da maratona foi 3 horas e 15 minutos»*.

A Eduarda duvidou da afirmação constante deste título. Recolheu, aleatoriamente, 300 tempos obtidos por atletas ao longo dos últimos dez anos e verificou que a média dos tempos era 3 horas e que o desvio padrão amostral era 45 minutos. Por fim, construiu um intervalo de confiança a 99% para o valor médio do tempo de duração da maratona.

Conclua, com base nos seus cálculos, se a Eduarda tinha razão em duvidar da informação dada pelo bloguista.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

7. Numa tarde sem atividades desportivas, os atletas do SCC aproveitaram o tempo para fazer compras em Pracóvia.

A Eduarda comprou vários presentes para a família, tendo pago o valor total de 1200 PRC com o cartão de débito.

Em casa, surpreendeu-se quando recebeu o extrato bancário, pois o valor debitado pela transação era superior ao que esperava, tendo em conta que, no dia das compras, cada PRC custava $0{,}80$ euros.

Telefonou ao seu gerente de conta, que a informou de que, numa transação deste tipo, são cobradas duas taxas:

- uma taxa fixa, no valor de $3{,}52$ euros;
- uma taxa percentual de $0{,}96\%$, aplicada à despesa efetuada em euros.

Determine o valor debitado na conta da Eduarda.

Apresente o valor arredondado às centésimas.

FIM

COTAÇÕES

Item Cotação (em pontos)											TOTAL
1.	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.1.**	**6.1.2.**	**6.2.**	**7.**	
20	20	20	20	20	15	20	20	15	15	15	**200**

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

2.ª Fase