REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática B

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 735/2.ª Fase 14 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2016

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Na resposta aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos relevantes para a resolução (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

GRUPO I

Uma empresa vinícola produziu vinho de elevada qualidade: 1280 garrafas de vinho tinto, 900 de vinho branco e 1050 de vinho rosé.

A empresa pretende vender essa produção a retalhistas em dois tipos de lotes:

- Lote I, a 1500 euros, com 160 garrafas de vinho tinto, 100 de vinho branco e 50 de vinho rosé;
- Lote II, a 1800 euros, com 80 garrafas de vinho tinto, 100 de vinho branco e 150 de vinho rosé.

Será possível a empresa obter uma receita de $15\,500$ euros com a venda de lotes dos dois tipos?

Na sua resposta, designe por x e por y, respetivamente, o número de lotes I e o número de lotes II que a empresa pode vender, e apresente:

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica da região admissível referente ao sistema de restrições;

– o valor máximo de receita que a empresa pode obter com a venda de lotes dos dois tipos.

GRUPO II

O estudo dos surtos de gripe é essencial em Saúde Pública.

1. Habitualmente, um surto de gripe faz aumentar a procura dos serviços prestadores de cuidados de saúde.

1.1. Na tabela seguinte, apresentam-se os registos do número, x, de pessoas infetadas por vírus de gripe, e do respetivo número, y, de hospitalizações associadas a gripe, em diferentes momentos, numa certa região.

Número de pessoas infetadas (x)	31	857	11 973	12 000	86 000	86 123	320 083	616 545
Número de hospitalizações (y)	6	117	1000	1100	5426	6000	13 848	18 339

Considere um modelo de regressão linear obtido a partir dos registos apresentados na tabela.

Estime, com base nesse modelo, o número de hospitalizações associadas a gripe, nessa região, caso sejam registados $250\,000$ infetados por vírus de gripe.

Na sua resposta, apresente os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, com quatro casas decimais.

Apresente o resultado final arredondado às unidades de milhar.

1.2. Admita que, numa determinada unidade de saúde, o tempo de espera, em minutos, por uma consulta de urgência é bem modelado por uma distribuição normal de valor médio 25 minutos.

A Maria dirige-se a essa unidade de saúde para uma consulta de urgência.

1.2.1. Indique a probabilidade de a Maria ter de esperar, pelo menos, 25 minutos pela consulta de urgência.

1.2.2. É mais provável a Maria ter de esperar menos de 15 minutos pela consulta de urgência, ou ter de esperar mais de 30 minutos por essa consulta?

Justifique a sua resposta.

2. As pandemias de gripe são epidemias que ocorrem com intervalos irregulares, habitualmente, de várias décadas.

Admita que, durante uma pandemia de gripe, a percentagem de casos de gripe, x dias após o início da pandemia, é dada, aproximadamente, por

$$f(x) = 4{,}75 \times e^{-0{,}007(x-42)^2} \quad , \text{ para } \quad x \in [0, 84]$$

2.1. Qual foi, aproximadamente, a percentagem de casos de gripe no instante em que se completaram três **semanas** após o início da pandemia?

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

2.2. Admita que as autoridades de saúde, no âmbito do plano de contingência para esta pandemia de gripe, mantiveram ativa uma determinada medida nos dias em que a percentagem de casos de gripe foi superior a 1%

Durante quantas semanas completas esteve ativa essa medida?

Resolva o problema recorrendo às potencialidades gráficas da sua calculadora.

GRUPO III

A água é uma substância química e um recurso natural essencial à vida na Terra.

1. Durante muito tempo, o regadio dos terrenos agrícolas foi auxiliado pelas rodas de água ou noras de corrente. As noras caíram em desuso, mas ainda existem algumas a funcionar nos dias de hoje.

A Figura 1 é uma fotografia de uma dessas noras.

A água que passa sob a nora empurra as suas pás, fazendo-a rodar.

Admita que:

- num determinado dia, a nora esteve a rodar com velocidade constante durante dez minutos e que, no dia seguinte, voltou a rodar durante dez minutos, também com velocidade constante, embora superior à do dia anterior;
- em ambos os dias, o nível da água se manteve constante e que uma determinada pá se encontrava na mesma posição, no instante em que a roda começou a rodar em sentido positivo.

Figura 1

Considere a altura dessa pá em relação ao nível da água, em metros, e considere o tempo após a nora ter começado a rodar, em segundos.

A Figura 2 é um esquema da situação, no qual:

- a circunferência representa a nora;
- o ponto P representa a posição inicial da pá;
- o ponteado representa o nível da água.

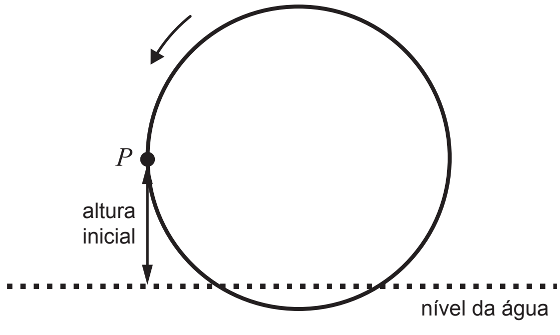


Figura 2

1.1. Relativamente ao primeiro dia, admita que a altura da pá, h_1 , t segundos após a nora ter começado a rodar, é dada, durante os dez minutos em que a nora rodou, por

$$h_1(t) = 2{,}1 - 2{,}5\,\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{10}\,t\right) \quad , \text{ com } \quad t \in [0, 600]$$

O argumento da função seno está em radianos.

1.1.1. Determine o diâmetro da nora.

1.1.2. Quantas voltas completas foram dadas pela pá durante o intervalo de tempo em que a nora rodou?

Justifique a sua resposta.

1.2. Designemos por h_2 a altura da pá t segundos após a nora ter começado a rodar no segundo dia.

Sabe-se que a função H , que dá, em metros por segundo, a taxa de variação instantânea da função h_2 , para cada valor de t , é definida por

$$H(t) = -\frac{5\pi}{14}\cos\left(\frac{\pi}{7}t\right) \quad , \text{ com } \quad t \in [0, 600]$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

Determine ao fim de quantos segundos a altura da pá foi máxima pela primeira vez, após a nora ter começado a rodar no segundo dia.

2. Numa aula de Química, um grupo de alunos realizou uma experiência com o objetivo de estudar a temperatura de ebulição da água.

A experiência consistiu em aquecer água num recipiente e registar, ao longo de algum tempo, a temperatura da água. Durante a experiência, a temperatura ambiente da sala manteve-se igual a $21\ ^{\circ}\mathrm{C}$

Às $14\mathrm{h}\ 50\mathrm{min}$, colocou-se o recipiente com água a aquecer. Algum tempo depois, o processo de aquecimento foi interrompido devido a uma falha elétrica. A partir desse instante, a água começou a arrefecer e, com o passar do tempo, a sua temperatura foi-se aproximando da temperatura ambiente da sala.

Seja x o tempo, em minutos, decorrido após as $14\mathrm{h}\ 50\mathrm{min}$, e seja f a função que a cada instante x faz corresponder o valor da temperatura, em $^{\circ}\mathrm{C}$, da água no recipiente.

Sabe-se que:

- a temperatura da água no recipiente, no instante em que se colocou a aquecer, era inferior à temperatura ambiente da sala;
- a falha elétrica ocorreu às 15 horas;
- a taxa média de variação da função f no intervalo $[5, 40]$ é positiva.

Nas Figuras 3, 4 e 5, estão representados três gráficos e as respetivas assíntotas horizontais, de equação $y = 21$

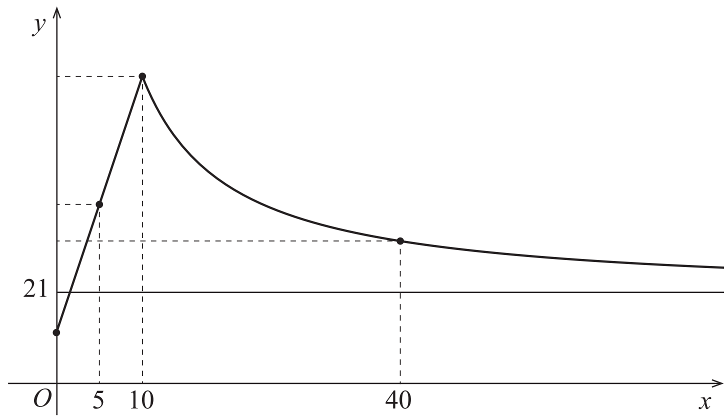


Figura 3

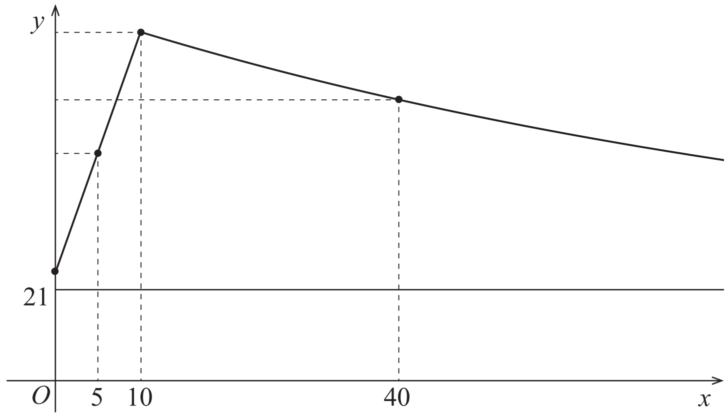


Figura 4

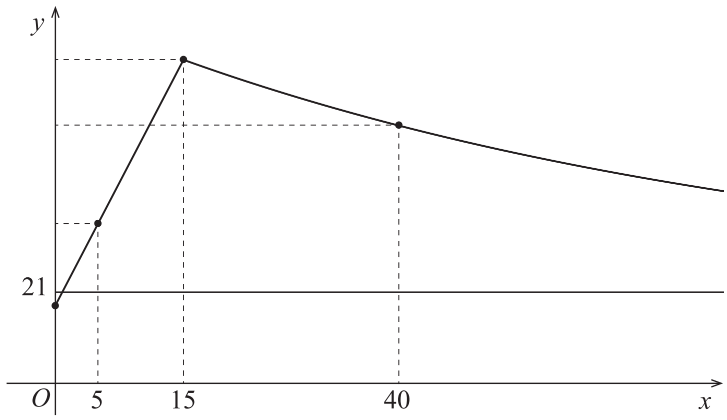


Figura 5

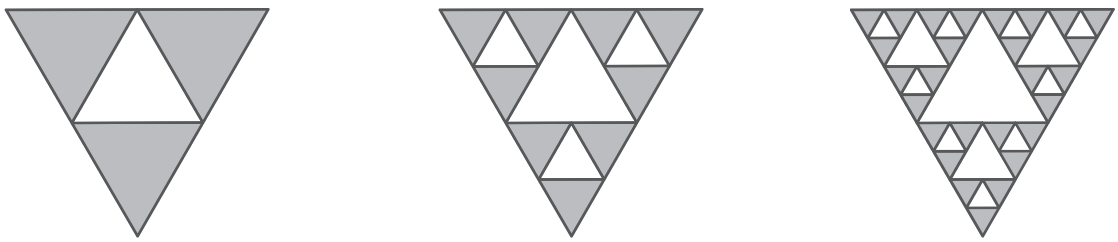
Apresente, num pequeno texto, para cada uma das Figuras, 3, 4 e 5, uma razão pela qual o gráfico representado **não** pode ser o gráfico da função f

GRUPO IV

Na Figura 6, apresentam-se as três primeiras etapas da construção de um Tapete de Sierpinski, feita a partir de um triângulo equilátero inicial.

Tal como a figura sugere, nesta construção:

- na *etapa 1*, marcam-se os pontos médios dos lados do triângulo inicial e retira-se o triângulo com vértices nesses pontos médios, obtendo-se três triângulos;
- na *etapa 2*, marcam-se os pontos médios dos lados dos triângulos obtidos na etapa anterior e retiram-se os triângulos com vértices nesses pontos médios, obtendo-se nove triângulos;
- e assim sucessivamente.



etapa 1 *etapa 2* *etapa 3*

Figura 6

1. Quantos triângulos são obtidos na *etapa 16* desta construção?

Justifique a sua resposta.

2. A sucessão das somas das áreas dos triângulos obtidos em cada etapa da construção é uma progressão geométrica.

Determine a razão dessa progressão.

Sugestão: Na sua resolução, considere que a área do triângulo inicial é 1

3. Num mural, com forma de paralelogramo, foram pintados triângulos equiláteros iguais aos da *etapa 1* da construção do Tapete de Sierspinski (os triângulos pintados a branco representam aquele que foi retirado naquela etapa).

Tal como ilustra a Figura 7, que não está à escala:

- os triângulos vão ocupar toda a superfície do mural, de modo a não existirem espaços nem sobreposições entre eles;
- o triângulo inicial tem $1\ \mathrm{dm}$ de lado;
- os lados do paralelogramo medem $20\ \mathrm{dm}$ e $10\ \mathrm{dm}$

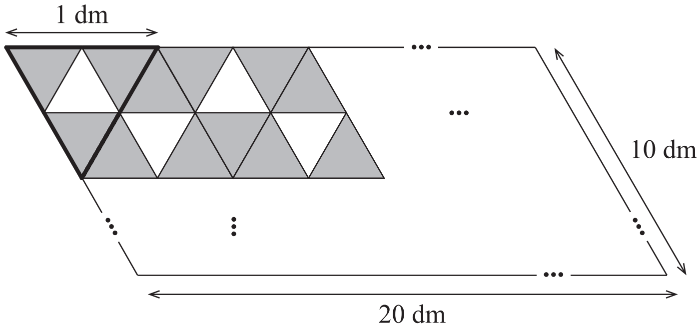


Figura 7

Determine a área do mural ocupada pelos triângulos pintados a branco.

Apresente o resultado em decímetros quadrados, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

4. Na Figura 8, estão representadas as planificações de duas pirâmides triangulares regulares. As planificações não estão desenhadas à escala.

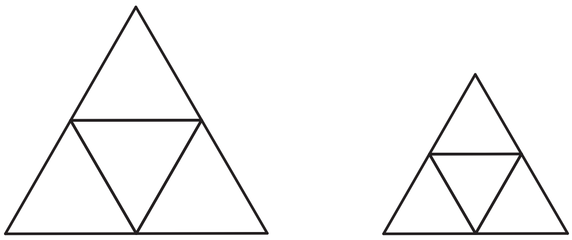


Figura 8

Sabe-se que a pirâmide de menores dimensões tem $10\ \mathrm{cm}$ de aresta e que a razão entre os volumes das duas pirâmides é $\frac{1}{64}$

Determine a soma dos comprimentos das arestas da pirâmide de maiores dimensões.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)					
I	Item único					
						30
II	1.1.	1.2.1.	1.2.2.	2.1.	2.2.	
	15	5	10	10	15	55
III	1.1.1.	1.1.2.	1.2.	2.		
	15	15	10	20		60
IV	1.	2.	3.	4.		
	10	15	20	10		55
TOTAL						200

ESTA FOLHA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 735

2.ª Fase