REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 11 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, e assinale os pontos relevantes para a resolução (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Página em branco

GRUPO I

A panificadora *MILHAFRE* fabrica diferentes tipos de pão, que são distribuídos pelas pastelarias e mercearias das povoações mais próximas.

1. A *MILHAFRE* produz diariamente, entre outros, dois tipos de pão de mistura, A e B, fabricados com farinha de trigo e farinha de centeio.

O fabrico de cada pão do tipo A requer $0{,}06\ \mathrm{kg}$ de farinha de trigo e $0{,}03\ \mathrm{kg}$ de farinha de centeio. Cada pão deste tipo dá um lucro de $0{,}25$ euros.

O fabrico de cada pão do tipo B requer $0{,}075\ \mathrm{kg}$ de farinha de trigo e $0{,}02\ \mathrm{kg}$ de farinha de centeio. Cada pão deste tipo dá um lucro de $0{,}20$ euros.

Num certo dia, a *MILHAFRE* dispõe de $6{,}9\ \mathrm{kg}$ de farinha de trigo e de $2{,}4\ \mathrm{kg}$ de farinha de centeio para fabricar estes dois tipos de pão.

Admita que, nesse dia, uma certa pastelaria compra todos os pães dos tipos A e B produzidos pela *MILHAFRE*.

Determine o número de pães do tipo A e o número de pães do tipo B que a *MILHAFRE* deve fabricar, nesse dia, de modo a ter o maior lucro possível nessa venda.

Na sua resposta, designe por x o número de pães do tipo A e por y o número de pães do tipo B fabricados, nesse dia, pela *MILHAFRE*, e percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

– indicar a função objetivo;

– indicar as restrições do problema;

– representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;

– apresentar o valor de x e o valor de y que são a solução do problema.

2. A panificadora *MILHAFRE* também fabrica outros três tipos de pão: C, D e E.

Os preços de venda destes três tipos de pão são os seguintes:

Tipo C – $1{,}60$ euros por unidade;

Tipo D – 1 euro por unidade;

Tipo E – $1{,}35$ euros por unidade.

Depois de fabricados, os pães são colocados em caixas.

Numa das caixas, que apenas contém pães destes três tipos, metade dos pães são do tipo C. A outra metade é constituída por igual número de pães do tipo D e de pães do tipo E.

Admita que todos os pães têm forma e tamanho idênticos.

Retira-se, ao acaso, um pão dessa caixa.

Seja X o preço de venda desse pão.

Determine o valor médio da variável aleatória X

Apresente o resultado em euros, arredondado às centésimas.

Na sua resposta, comece por apresentar a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X

3. Admita que o volume de cada pão do tipo C, medido em centímetros cúbicos, segue uma distribuição normal de valor médio 500 e desvio padrão 15

Para que um pão deste tipo possa ser corretamente embalado, o seu volume tem de estar compreendido entre $485\ \text{cm}^3$ e $530\ \text{cm}^3$

Escolhe-se, ao acaso, um pão do tipo C.

Determine a probabilidade de o pão escolhido **não** poder ser corretamente embalado, por não cumprir os requisitos relativos ao volume.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

GRUPO II

Um laboratório possui dois reservatórios de água.

1. Considere que, inicialmente, um dos reservatórios está cheio de água, isto é, a altura da água é igual à altura do reservatório, e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado.

Admita que a altura da água, em metros, nesse reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado e até ao instante em que fica vazio, é dada por

$$h(t) = 2{,}15 + \ln(8{,}9 - 0{,}51\,t)$$

Determine ao fim de quanto tempo, após o início do esvaziamento, a altura da água é igual a metade da altura do reservatório.

Apresente o resultado em horas, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Admita que, no laboratório, o outro reservatório está igualmente cheio de água e também vai ser esvaziado.

Neste reservatório, foi instalada uma bóia à superfície da água, ligada a um instrumento de registo de dados.

A partir do instante em que o reservatório começou a ser esvaziado, foram enviados, da bóia para o instrumento de registo, dados relativos ao tempo, x, em horas, decorrido após o início do esvaziamento e à correspondente altura, y, em metros, da água. Alguns desses dados são apresentados na tabela seguinte.

Tempo, em horas, decorrido após o início do esvaziamento (x)	0,32	1,47	3,85	4,29	4,76	5,01	5,86
Altura, em metros, da água (y)	4,18	3,62	2,78	2,18	1,79	1,72	0,35

Considere válido um modelo de regressão cúbica, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, obtido a partir dos registos apresentados na tabela.

Estime, com base nesse modelo, a previsão da altura da água, decorridas seis horas após o início do esvaziamento.

Na sua resposta, apresente os valores de a, b, c e d arredondados às milésimas.

Apresente o resultado em metros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

GRUPO III

Em Portugal, a utilização da bicicleta como meio de transporte nos centros urbanos é cada vez mais comum.

1. O Vicente comprou uma bicicleta.

Admita que o valor da bicicleta do Vicente, t anos após ter sido comprada, é dado, em euros, aproximadamente, por

$$V(t) = 999{,}9 \times 0{,}83^{t} \qquad (t \geq 0)$$

1.1. Qual é o valor da bicicleta do Vicente meio ano após ter sido comprada?

Apresente o resultado em euros, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.2. Ao fim de quanto tempo, após a compra, o valor da bicicleta do Vicente é 374 euros?

Apresente o resultado em anos, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

1.3. Determine o valor de $\dfrac{V(3) - V(0)}{3}$, aproximado às unidades, e interprete esse valor no contexto do problema.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. Na Figura 1, está representada a roda da frente da bicicleta do Vicente, na qual foi instalado um refletor.

O Vicente pedala numa estrada sem curvas e mantendo uma velocidade constante. Num certo instante, inicia-se a contagem do tempo.

Sabe-se que, t segundos após esse instante, a distância do refletor ao solo é dada, em centímetros, por

$$d(t) = 20 + a\cos(bt)\,, \text{ com } t \geq 0$$

em que $a \in \mathbb{R}$ e $b \in [0, 12]$

O argumento da função cosseno está em radianos.

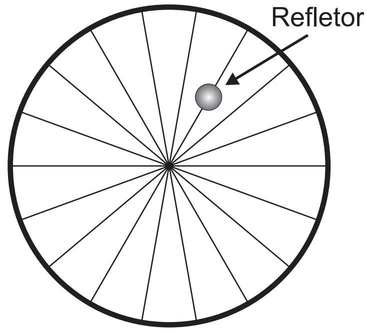

Figura 1

2.1. Sabe-se que, no instante inicial, a distância do refletor ao solo é 30 cm e que, $0{,}15$ segundos após esse instante, essa distância passou a ser 20 cm

Determine o valor de a e o valor de b

Apresente o valor de b arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2.2. Na Figura 2, está representado o gráfico da função T, que dá a taxa de variação instantânea da função d, para cada valor de t pertencente ao intervalo $[0{,}1\,;0{,}8]$

Sabe-se que, neste intervalo, $0{,}3$ e $0{,}6$ são os únicos zeros da função T

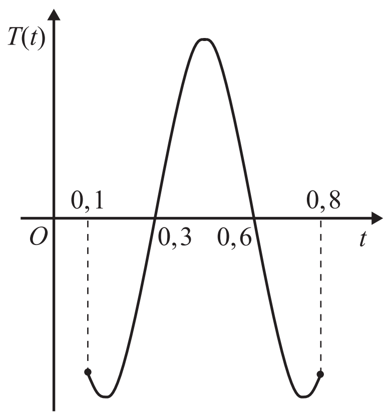

Figura 2

Interprete, no contexto do problema, os valores $0{,}3$ e $0{,}6$

GRUPO IV

O clube naval de uma certa cidade possui alguns barcos à vela.

1. A Figura 3 é uma fotografia de um barco à vela desse clube.

Na Figura 4, está representado um esquema das duas velas que se podem observar na fotografia.

Figura 3

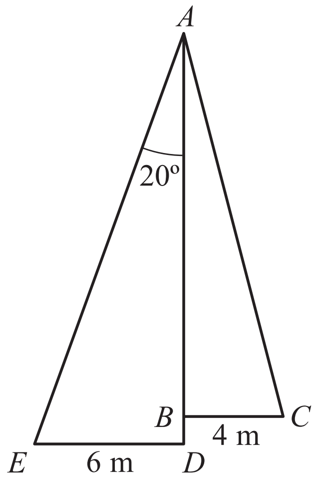

Figura 4

Relativamente à Figura 4, que não está desenhada à escala, sabe-se que:

- o triângulo $[ABC]$ é retângulo em B, e o triângulo $[ADE]$ é retângulo em D
- $\overline{BC} = 4\text{ m}$ e $\overline{ED} = 6\text{ m}$
- $E\hat{A}D = 20^{\text{o}}$

1.1. Admita que a área do triângulo $[ABC]$ é igual a 31 m^2

Determine $\overline{BD}$

Apresente o resultado em metros, arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

1.2. Admita agora que $\overline{BD} = 1\text{ m}$

Considere um referencial ortogonal e monométrico, xOy, cuja origem coincide com o ponto B da Figura 4 e em que a unidade é 1 metro. Nesse referencial, o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox e o ponto A pertence ao semieixo positivo Oy

Seja E' o simétrico do ponto E relativamente ao eixo Ox

Quais são as coordenadas do ponto E' ?

2. O clube naval promove, durante o mês de agosto, um curso de iniciação à vela. De acordo com as regras do curso, na parte prática, cada participante deve navegar, em cada dia do mês, um certo número de milhas marítimas.

Mais precisamente, cada participante deve navegar uma milha marítima no primeiro dia do mês, uma milha e meia no segundo dia, duas milhas no terceiro dia, e assim sucessivamente, até ao dia 31 de agosto. Assim sendo, em cada dia, após o primeiro, cada participante deve navegar mais meia milha marítima do que no dia anterior.

2.1. Mostre que o número total de milhas marítimas que cada participante deve navegar, nos n primeiros dias do mês de agosto, é dado por

$$\frac{n^2 + 3n}{4}$$

2.2. Determine o dia do mês em que, de acordo com as regras do curso, o número total de milhas marítimas navegadas por cada participante, até esse dia, inclusive, ultrapassa, pela primeira vez, uma centena.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)					
I	**1.** 30	**2.** 15	**3.** 15			**60**
II	**1.** 15	**2.** 15				**30**
III	**1.1.** 10	**1.2.** 10	**1.3.** 10	**2.1.** 20	**2.2.** 10	**60**
IV	**1.1.** 15	**1.2.** 10	**2.1.** 15	**2.2.** 10		**50**
TOTAL						**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 735

1.ª Fase