REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 12 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta a cada um dos itens de escolha múltipla, selecione a única opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos e as coordenadas dos pontos (por exemplo, coordenadas de pontos de intersecção de gráficos, máximos e mínimos);
- as linhas da tabela obtida;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Teoria matemática das eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

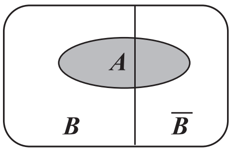
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

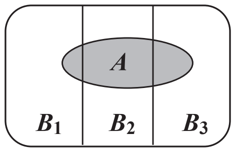
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Distribuição normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left]\overline{x}-z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x}+z\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x}-z\dfrac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x}+z\dfrac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\hat{p}-z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p}+z\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\hat{p}$ – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. A Escola de Vilar de Sadeija inscreveu-se num concurso em que vai participar com uma equipa de 10 alunos.

Para formar a equipa, foi realizada uma eleição à qual concorreram as listas V, X, Y e Z.

Na Tabela 1, está registado o número de votos, validamente expressos, obtidos por cada uma das listas.

Tabela 1

Lista	**V**	**X**	**Y**	**Z**
Número de votos	373	602	318	157

1.1. Os dados da Tabela 1 permitem concluir que nenhuma das listas obteve maioria absoluta. Nestas circunstâncias, fazem-se, por vezes, coligações.

Admita que o número de votos obtidos por uma coligação é igual à soma dos números de votos validamente expressos nas listas que formam essa coligação, e que o número de votos das outras listas se mantém.

Qual das coligações seguintes permitiria obter maioria absoluta?

(A) V com Z

(B) X com Z

(C) Y com Z

(D) V com Y

1.2. Na seleção dos 10 alunos da equipa, a direção da escola optou por aplicar o método de Hondt.

Um dos alunos, ao observar a Tabela 1, afirmou que, usando-se o método de Hondt, a equipa teria tantos alunos da Lista V como da Lista Y.

Verifique se o aluno tinha razão.

Na sua resposta, apresente:

– os quocientes da aplicação do método de Hondt arredondados às unidades;

– o número de elementos de cada lista na equipa constituída.

2. A direção da escola atribuiu um prémio a três projetos, o Jornal da Escola (J), o Clube da Ciência (C) e o Clube de Teatro (T). O prémio é constituído por um computador, uma impressora e uma máquina fotográfica.

Como os coordenadores dos projetos não chegaram a acordo quanto à divisão do prémio, a direção estabeleceu que o prémio seria partilhado utilizando o método seguinte.

- Cada um dos coordenadores dos projetos atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos bens, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações dos três coordenadores são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos bens por cada coordenador e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada coordenador considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu aos três bens.
- Cada bem é atribuído ao projeto coordenado por quem mais o valoriza, e considera-se que o projeto recebe o valor monetário que o seu coordenador atribui ao respetivo bem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um projeto não receba qualquer bem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o «valor dos bens recebidos» por esse projeto é zero euros.
- Seguidamente, caso o valor dos bens recebidos por um projeto ultrapasse o valor que o seu coordenador considera justo receber, o coordenador paga em dinheiro, dos fundos do seu projeto, o respetivo excedente. Caso contrário, o projeto recebe, em dinheiro, do montante disponibilizado pelos coordenadores que pagaram, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso sobre dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos três projetos.

Na Tabela 2, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada um dos coordenadores aos bens, nas licitações secretas.

Tabela 2

Bens \ Projetos	J	C	T
Computador	350	400	304
Impressora	400	380	168
Máquina Fotográfica	201	252	302

Como será distribuído o prémio pelos três projetos?

Na sua resposta, apresente os valores monetários a pagar ou a receber por cada coordenador.

3. A associação de estudantes está a preparar um *pedipaper* que engloba seis postos de controlo, designados por C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6.

Na Tabela 3, estão indicadas as distâncias, em metros, entre diferentes postos de controlo.

Tabela 3

	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
C_1	160	–	–	302	280
C_2	–	253	–	350	270
C_3	–	–	286	340	267
C_4	–	–	–	–	294

A associação de estudantes decidiu que o *pedipaper* se iniciaria no posto de controlo C_5 e terminaria num outro posto de controlo.

Além disso, para definir o percurso, a associação de estudantes optou por utilizar o método seguinte.

- Seleciona-se o posto de controlo seguinte, tendo em conta que:
  - deve ser o mais próximo possível;
  - se houver dois postos à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhum posto de controlo, e terminando depois de serem visitados todos os postos de controlo.

Determine o comprimento do percurso, respeitando as condições definidas pela associação de estudantes.

Na sua resposta, apresente:

– um grafo ponderado que modele a situação descrita na Tabela 3;

– a ordem de visita dos postos de controlo.

4. Com o objetivo de preparar a viagem de finalistas, a associação de estudantes contactou uma agência de viagens.

A agência apresentou um orçamento de 600 euros e informou que este valor poderia ser pago a crédito, em quatro prestações, com uma taxa de juro de 10%, a 360 dias, nas seguintes condições:

- o pagamento da primeira prestação é feito 90 dias após a concessão do crédito;
- o pagamento de cada uma das restantes prestações é feito 90 dias após o pagamento da prestação anterior.

O valor de cada prestação é dado pela expressão

$$P_n = C \times [0{,}25 + j \times (1{,}25 - 0{,}25n)]$$

C – custo da viagem
n – número de períodos de 90 dias, decorridos após a concessão do crédito
j – taxa de juro a 90 dias

Determine, em euros, o valor da primeira prestação e o valor da segunda prestação.

Na sua resposta, apresente a taxa de juro a 90 dias.

5. A Escola de Vilar de Sadeija foi inaugurada no ano 2000.

Admita que, t anos após a inauguração da escola, o número de alunos matriculados no início de cada ano letivo é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$A(t) = \frac{2350}{1 + 5e^{-0,43t}}, \text{ com } t = 0, 1, 2, \ldots$$

5.1. Com o passar do tempo, o número de alunos matriculados aproxima-se de um valor que não pode ser ultrapassado.

Identifique esse valor, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Na sua resposta:

– apresente o gráfico visualizado que lhe permite resolver o problema;

– assinale no gráfico o valor do qual, com o passar do tempo, se aproxima o número de alunos matriculados.

5.2. Na investigação para um artigo, um elemento do jornal da escola analisou a evolução do número de alunos matriculados no início de cada ano letivo, na escola.

Verificou que, no ano em que o jornal passou a ter instalações próprias, havia mais 950 alunos matriculados do que em 2002, ano em que o jornal foi fundado.

Determine o ano em que o jornal passou a ter instalações próprias.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, três casas decimais.

6. Fez-se um estudo estatístico do tempo que os alunos da Escola de Vilar de Sadeija demoram no percurso de casa à escola.

Na Tabela 4, estão parcialmente registados os dados recolhidos.

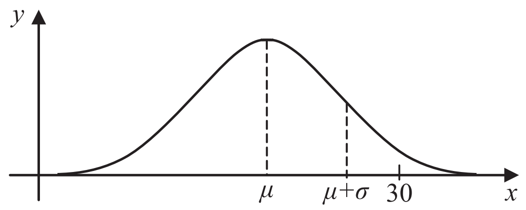
Tabela 4

Tempo (em minutos)	Número de alunos	Frequência relativa simples (%)	Frequência relativa acumulada (%)
[0, 10[		a	
[10, 20[	144	12	
[20, 30[	336		65
[30, 40[			

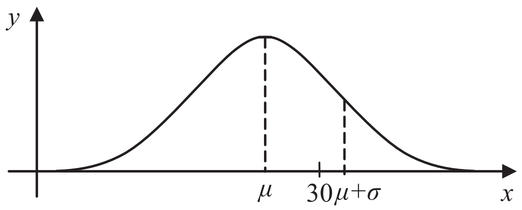
6.1. Admita que a variável aleatória «tempo gasto por cada aluno no percurso de casa à escola» é bem modelada por uma distribuição normal.

Qual das seguintes curvas de Gauss é a mais adequada aos dados da Tabela 4?

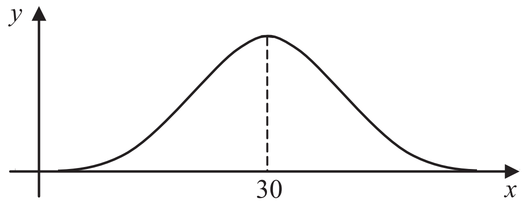
(A)



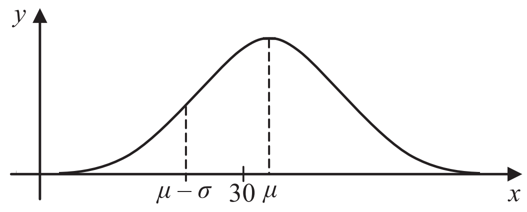
(B)



(C)



(D)



6.2. Atendendo aos dados da Tabela 4, determine o valor de a.

7. Inquiriram-se 500 alunos da escola, escolhidos ao acaso, relativamente ao número de vezes que foram ao cinema durante o ano de 2016.

Na Figura 1, está uma representação dos dados recolhidos.

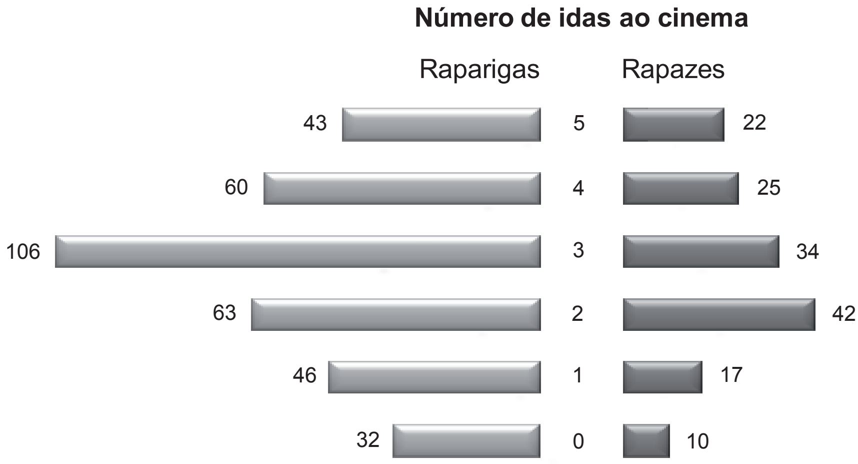


Figura 1

7.1. Considere apenas os dados referentes às 350 raparigas inquiridas.

Qual é a percentagem, arredondada às décimas, de raparigas que foram ao cinema, pelo menos, três vezes no ano?

(A) $29{,}4$

(B) $40{,}3$

(C) $59{,}7$

(D) $71{,}4$

7.2. Escolhem-se aleatoriamente dois alunos, um a seguir ao outro, de entre os que foram ao cinema uma vez no ano.

Determine a probabilidade de serem ambos do mesmo sexo.

Apresente o resultado, em percentagem, arredondado às unidades.

7.3. Tendo por referência os dados da Figura 1, construa um intervalo de confiança a 95%, aproximado, para o valor médio da variável aleatória «número de idas ao cinema, no ano 2016, de um jovem desta escola».

Apresente os valores dos extremos do intervalo arredondados às décimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, duas casas decimais.

8. Na Figura 2, está representada uma roleta formada por oito sectores de igual amplitude, dos quais três estão coloridos a cinzento e os restantes a branco.

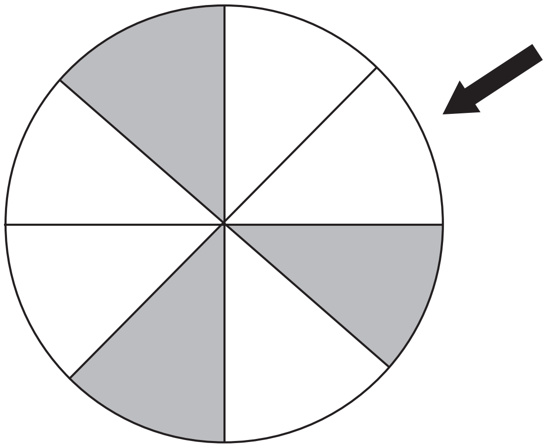


Figura 2

8.1. Considere a experiência aleatória que consiste em rodar a roleta duas vezes, registando-se a cor do sector assinalado pela seta de cada vez que a roleta para.

Considere a variável aleatória:

X: *«número de vezes em que a roleta para num sector colorido a cinzento»*

Construa a tabela de distribuição de probabilidade da variável aleatória X.

Apresente os valores das probabilidades na forma de fração irredutível.

8.2. Mantendo-se a cor dos sectores da roleta representada na Figura 2, admita que cada um deles foi numerado ou com o algarismo 1 ou com o algarismo 2.

Roda-se esta roleta apenas uma vez, registando-se a cor e o número do sector assinalado pela seta quando a roleta para.

Admita ainda que a probabilidade de o sector assinalado estar:

- colorido a cinzento, sabendo-se que está numerado com o algarismo 2, é igual a 50%
- colorido a branco, sabendo-se que está numerado com o algarismo 1, é igual a $\frac{2}{3}$

Determine a probabilidade de se obter um sector numerado com o algarismo 2.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

FIM

COTAÇÕES

Item Cotação (em pontos)														TOTAL
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**7.3.**	**8.1.**	**8.2.**	
5	15	20	15	15	15	20	5	20	5	15	20	15	15	**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

2.ª Fase

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Entrelinha 1,5, sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 12 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário no final do enunciado da prova.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta a cada um dos itens de escolha múltipla, selecione a única opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. A Escola de Vilar de Sadeija inscreveu-se num concurso em que vai participar com uma equipa de 10 alunos.

Para formar a equipa, foi realizada uma eleição à qual concorreram as listas V, X, Y e Z.

Na Tabela 1, está registado o número de votos, validamente expressos, obtidos por cada uma das listas.

Tabela 1

Lista	Número de votos
V	373
X	602
Y	318
Z	157

1.1. Os dados da Tabela 1 permitem concluir que nenhuma das listas obteve maioria absoluta. Nestas circunstâncias, fazem-se, por vezes, coligações.

Admita que o número de votos obtidos por uma coligação é igual à soma dos números de votos validamente expressos nas listas que formam essa coligação, e que o número de votos das outras listas se mantém.

Qual das coligações seguintes permitiria obter maioria absoluta?

a) V com Z

b) X com Z

c) Y com Z

d) V com Y

1.2. Na seleção dos 10 alunos da equipa, a direção da escola optou por aplicar o método de Hondt.

Um dos alunos, ao observar a Tabela 1, afirmou que, usando-se o método de Hondt, a equipa teria tantos alunos da Lista V como da Lista Y.

Verifique se o aluno tinha razão.

Na sua resposta, apresente:

– os quocientes da aplicação do método de Hondt arredondados às unidades;

– o número de elementos de cada lista na equipa constituída.

2. A direção da escola atribuiu um prémio a três projetos, o Jornal da Escola (J), o Clube da Ciência (C) e o Clube de Teatro (T). O prémio é constituído por um computador, uma impressora e uma máquina fotográfica.

Como os coordenadores dos projetos não chegaram a acordo quanto à divisão do prémio, a direção estabeleceu que o prémio seria partilhado utilizando o método seguinte.

- Cada um dos coordenadores dos projetos atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos bens, colocando o registo dos valores das suas licitações dentro de um envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações dos três coordenadores são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos bens por cada coordenador e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada coordenador considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu aos três bens.
- Cada bem é atribuído ao projeto coordenado por quem mais o valoriza, e considera-se que o projeto recebe o valor monetário que o seu coordenador atribui ao respetivo bem.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um projeto não receba qualquer bem, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o «valor dos bens recebidos» por esse projeto é zero euros.
- Seguidamente, caso o valor dos bens recebidos por um projeto ultrapasse o valor que o seu coordenador considera justo receber, o coordenador paga em dinheiro, dos fundos do seu projeto, o respetivo excedente. Caso contrário, o projeto recebe, em dinheiro, do montante disponibilizado pelos coordenadores que pagaram, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso sobre dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos três projetos.

Na Tabela 2, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada um dos coordenadores aos bens, nas licitações secretas.

Tabela 2

Bens \ Projetos	J	C	T
Computador	350	400	304
Impressora	400	380	168
Máquina Fotográfica	201	252	302

Como será distribuído o prémio pelos três projetos?

Na sua resposta, apresente os valores monetários a pagar ou a receber por cada coordenador.

3. A associação de estudantes está a preparar um *pedipaper* que engloba seis postos de controlo, designados por C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 e C_6.

Na Tabela 3, estão indicadas as distâncias, em metros, entre diferentes postos de controlo.

Tabela 3

	C_1	C_2	C_3	C_4
C_2	160	–	–	–
C_3	–	253	–	–
C_4	–	–	286	–
C_5	302	350	340	–
C_6	280	270	267	294

A associação de estudantes decidiu que o *pedipaper* se iniciaria no posto de controlo C_5 e terminaria num outro posto de controlo.

Além disso, para definir o percurso, a associação de estudantes optou por utilizar o método seguinte.

- Seleciona-se o posto de controlo seguinte, tendo em conta que:
  - deve ser o mais próximo possível;
  - se houver dois postos à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Procede-se como foi indicado no ponto anterior, não se repetindo nenhum posto de controlo, e terminando depois de serem visitados todos os postos de controlo.

Determine o comprimento do percurso, respeitando as condições definidas pela associação de estudantes.

Na sua resposta:

– identifique as distâncias entre os diferentes postos de controlo selecionados;

– apresente a ordem de visita dos postos de controlo.

4. Com o objetivo de preparar a viagem de finalistas, a associação de estudantes contactou uma agência de viagens.

A agência apresentou um orçamento de 600 euros e informou que este valor poderia ser pago a crédito, em quatro prestações, com uma taxa de juro de 10%, a 360 dias, nas seguintes condições:

- o pagamento da primeira prestação é feito 90 dias após a concessão do crédito;
- o pagamento de cada uma das restantes prestações é feito 90 dias após o pagamento da prestação anterior.

O valor de cada prestação é dado pela expressão

$$P_n = C \times [0{,}25 + j \times (1{,}25 - 0{,}25n)]$$

C – custo da viagem
n – número de períodos de 90 dias, decorridos após a concessão do crédito
j – taxa de juro a 90 dias

Determine, em euros, o valor da primeira prestação e o valor da segunda prestação.

Na sua resposta, apresente a taxa de juro a 90 dias.

5. A Escola de Vilar de Sadeija foi inaugurada no ano 2000.

Admita que, t anos após a inauguração da escola, o número de alunos matriculados no início de cada ano letivo é bem aproximado pelo modelo seguinte, com arredondamento às unidades.

$$A(t) = \frac{2350}{1 + 5e^{-0{,}43t}}, \text{ com } t = 0, 1, 2, \ldots$$

5.1. Prove que em 2003 o número de alunos matriculados no início do ano letivo ultrapassou o dobro do número de alunos matriculados no ano de inauguração da escola.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, três casas decimais.

5.2. Na investigação para um artigo, um elemento do jornal da escola analisou a evolução do número de alunos matriculados no início de cada ano letivo, na escola.

Verificou que, no ano em que o jornal passou a ter instalações próprias, havia mais 950 alunos matriculados do que em 2002, ano em que o jornal foi fundado.

Determine o ano em que o jornal passou a ter instalações próprias.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, três casas decimais.

6. Fez-se um estudo estatístico do tempo que os alunos da Escola de Vilar de Sadeija demoram no percurso de casa à escola.

Na Tabela 4, estão parcialmente registados os dados recolhidos.

Tabela 4

Tempo (em minutos)	Número de alunos	fr_i (%)	Fr_i (%)
[0, 10[		a	
[10, 20[	144	12	
[20, 30[	336		65
[30, 40[			

fr_i – Frequência relativa simples
Fr_i – Frequência relativa acumulada

6.1. Admita que a variável aleatória «tempo gasto por cada aluno no percurso de casa à escola» é bem modelada por uma distribuição normal de valor médio μ e desvio padrão σ.

Qual das opções seguintes é necessariamente verdadeira?

a) $30 > \mu + \sigma$

b) $\mu < 30 < \mu + \sigma$

c) $\mu = 30$

d) $\mu - \sigma < 30 < \mu$

6.2. Atendendo aos dados da Tabela 4, determine o valor de a.

7. Inquiriram-se 500 alunos da escola, escolhidos ao acaso, relativamente ao número de vezes que foram ao cinema durante o ano de 2016.

Na Tabela 5, está uma representação dos dados recolhidos.

Tabela 5

N.º de idas ao cinema	Raparigas	Rapazes
0	32	10
1	46	17
2	63	42
3	106	34
4	60	25
5	43	22

7.1. Considere apenas os dados referentes às 350 raparigas inquiridas.

Qual é a percentagem, arredondada às décimas, de raparigas que foram ao cinema, pelo menos, três vezes no ano?

a) 29,4

b) 40,3

c) 59,7

d) 71,4

7.2. Escolhem-se aleatoriamente dois alunos, um a seguir ao outro, de entre os que foram ao cinema uma vez no ano.

Determine a probabilidade de serem ambos do mesmo sexo.

Apresente o resultado, em percentagem, arredondado às unidades.

7.3. Tendo por referência os dados da Tabela 5, construa um intervalo de confiança a 95%, aproximado, para o valor médio da variável aleatória «número de idas ao cinema, no ano 2016, de um jovem desta escola».

Apresente os valores dos extremos do intervalo arredondados às décimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve, exatamente, duas casas decimais.

8. Considere um dado octaédrico, equilibrado, com três faces coloridas a cinzento e as restantes cinco coloridas a branco.

8.1. Lança-se o dado duas vezes e observa-se a cor da face voltada para cima.

Considere a variável aleatória:

X: *«número de vezes que, nesses dois lançamentos, sai face cinzenta»*

Indique os valores da variável aleatória X e calcule as probabilidades para os diferentes valores da mesma.

Apresente os valores das probabilidades na forma de fração irredutível.

8.2. Mantendo-se a cor das faces do dado, admita que cada uma delas foi numerada ou com o algarismo 1 ou com o algarismo 2.

Lança-se este dado apenas uma vez, registando-se a cor e o número da face voltada para cima.

Admita ainda que a probabilidade de a face voltada para cima estar:

- colorida a cinzento, sabendo-se que está numerada com o algarismo 2, é igual a 50%
- colorida a branco, sabendo-se que está numerada com o algarismo 1, é igual a $\frac{2}{3}$

Determine a probabilidade de se obter uma face numerada com o algarismo 2.

Apresente o resultado na forma de percentagem.

FIM

COTAÇÕES

1.		
1.1.	5 pontos	
1.2.	15 pontos	
		20 pontos
2.		**20 pontos**
3.		**15 pontos**
4.		**15 pontos**
5.		
5.1.	15 pontos	
5.2.	20 pontos	
		35 pontos
6.		
6.1.	5 pontos	
6.2.	20 pontos	
		25 pontos
7.		
7.1.	5 pontos	
7.2.	15 pontos	
7.3.	20 pontos	
		40 pontos
8.		
8.1.	15 pontos	
8.2.	15 pontos	
		30 pontos
TOTAL		**200 pontos**

Formulário

Teoria matemática das eleições

Conversão de votos em mandatos, utilizando o método de representação proporcional de Hondt

O número de votos apurados por cada lista é dividido, sucessivamente, por 1, 2, 3, 4, 5, etc., sendo os quocientes alinhados, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os mandatos atribuídos ao círculo eleitoral em causa; os mandatos pertencem às listas a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada uma das listas tantos mandatos quantos os seus termos na série; no caso de só ficar um mandato por distribuir e de os termos seguintes da série serem iguais e de listas diferentes, o mandato cabe à lista que tiver obtido o menor número de votos.

Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$

$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Distribuição normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\quad \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	z
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576