Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 10 Páginas

---

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, e assinale os pontos relevantes para a resolução (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Página em branco

GRUPO I

A *CONFETE* é uma confeitaria familiar que fabrica e vende doces.

1. Entre os vários tipos de doces fabricados pela *CONFETE*, são especialmente apreciadas as duas variedades de doce de abóbora e noz: a tradicional e a *gourmet*.

Os doces são confecionados em panelas de cobre e, posteriormente, embalados em frascos para venda.

Cada panela de doce tradicional dá um lucro de 8 euros e é fabricado com $0{,}5 \text{ kg}$ de abóbora, $0{,}1 \text{ kg}$ de miolo de noz e $0{,}3 \text{ kg}$ de açúcar.

Cada panela de doce *gourmet* dá um lucro de 10 euros e é fabricado com $0{,}6 \text{ kg}$ de abóbora, $0{,}2 \text{ kg}$ de miolo de noz e $0{,}1 \text{ kg}$ de açúcar.

Num certo dia, a *CONFETE* dispõe de 20 kg de abóbora, 6 kg de miolo de noz e $8{,}1 \text{ kg}$ de açúcar para fabricar estas duas variedades de doce.

Admita que todo o doce fabricado é vendido.

Determine o número de panelas de doce tradicional e o número de panelas de doce *gourmet* que a confeitaria deve fabricar, de modo a ter o maior lucro possível nesta venda.

Na sua resposta, designe por x o número de panelas de doce tradicional e por y o número de panelas de doce *gourmet* fabricadas, nesse dia, pela *CONFETE*, e percorra, sucessivamente, as seguintes etapas:

- indicar a função objetivo;
- indicar as restrições do problema;
- representar, graficamente, a região admissível referente ao sistema de restrições;
- apresentar o valor de x e o valor de y que são a solução do problema.

2. Na Figura 1, está representado um esquema da tampa de um frasco de doce vendido na *CONFETE*.

Nesse esquema, estão representados uma circunferência de centro O, o quadrado $[PQRS]$ e quatro triângulos isósceles geometricamente iguais. Cada um destes triângulos tem um vértice que pertence à circunferência e tem um lado, diferente dos outros dois, que coincide com um lado do quadrado. Os vértices dos triângulos que pertencem à circunferência são designados pelas letras A, B, C e D

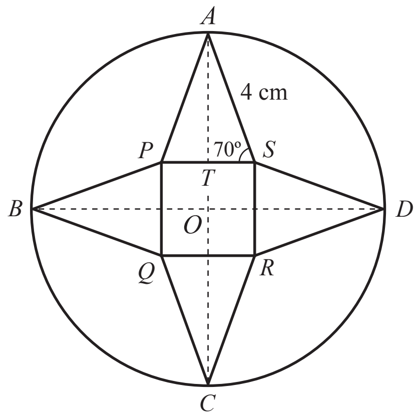

Figura 1

2.1. Sabe-se que:

- $\overline{AS} = 4 \text{ cm}$
- $A\hat{S}P = 70^{\circ}$
- o ponto T é o ponto médio do segmento de reta $[PS]$

Determine a área do círculo de centro O e raio $\overline{OD}$

Apresente o resultado em centímetros quadrados, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

2.2. Considere a rotação de centro no ponto O e amplitude 630°

Qual é o transformado do ponto C por meio dessa rotação?

3. As tampas dos frascos são guardadas em caixas. Uma dessas caixas contém seis tampas, indistinguíveis ao tato, das quais duas são amarelas e quatro são verdes.

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas tampas dessa caixa.

Determine a probabilidade de as duas tampas retiradas serem amarelas.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

GRUPO II

Os pinheiros são, por vezes, atingidos por doenças.

Numa certa região, um pinhal foi afetado por uma doença, tendo-se iniciado o ataque a essa doença com um tratamento adequado que durou quarenta semanas.

Admita que, t semanas após o início do tratamento, a área de pinhal já atingida pela doença, em hectares, é dada, para um certo número real positivo k, por

$$f(t) = 0{,}25 + 6\ln(k\,t + 1)\,,\ \text{com}\ \ 0 \leq t \leq 40$$

1. Determine o valor de k, sabendo que, dez semanas após o início do tratamento, a área de pinhal já atingida era de $4{,}4$ hectares.

Apresente o resultado arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Seja g a função, de domínio $[0,\ 40]$, que dá, em cada instante t, a taxa de variação instantânea da função f

Considere a seguinte afirmação: «A função g é sempre positiva.»

Interprete esta afirmação no contexto do problema.

GRUPO III

Num laboratório, procura-se testar as propriedades de condução de calor de três materiais diferentes. Para tal, utilizam-se três barras, A, B e C, compostas dos materiais a analisar.

1. Considere que as barras A e B foram aquecidas e, num determinado instante, revestidas de uma película isolante e colocadas a arrefecer.

Admita que, t minutos após esse instante, a temperatura no ponto médio da barra A é dada, em graus Celsius, por

$$A(t) = 18 + 72\,e^{-0{,}02\,t}$$

e a temperatura no ponto médio da barra B é dada, também em graus Celsius, por

$$B(t) = 18 + 50\,e^{-0{,}01\,t}$$

1.1. Determine o valor de $A(0) - B(0)$ e interprete esse valor no contexto do problema.

1.2. Determine ao fim de quanto tempo, após as duas barras terem sido colocadas a arrefecer, é que a temperatura no ponto médio da barra A é igual à temperatura no ponto médio da barra B.

Apresente o resultado em minutos, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

2. Considere agora que, num determinado instante, a barra C, depois de aquecida, foi revestida de uma película isolante e que as suas extremidades foram colocadas em contacto com o gelo. Nesse instante, a barra começou a arrefecer.

Durante alguns minutos, imediatamente a seguir a esse instante, foi registada a temperatura da barra, de dois em dois minutos.

Na tabela seguinte, estão registados alguns instantes, x, em minutos, e as correspondentes temperaturas, y, em graus Celsius.

Tempo, em minutos, decorrido após o início do arrefecimento (x)	2	4	6	8	10	12
Temperatura, em graus Celsius, da barra (y)	46,1	42,4	39,1	36,2	33,6	31,1

Considere válido um modelo de regressão exponencial, $y = a\,b^x$, obtido a partir dos dados da tabela.

Estime, com base neste modelo, a temperatura da barra, catorze minutos após o instante em que esta começou a arrefecer.

Na sua resposta, apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas.

Apresente o resultado em graus Celsius, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

GRUPO IV

Num arraial de uma aldeia, encontra-se uma barraca com um jogo de tiro ao alvo.

1. O jogo é constituído por dois alvos, A e B, que se deslocam ao longo de duas calhas circulares e concêntricas, de raios iguais a 1 e a 2 decímetros, respetivamente.

A Figura 2 ilustra a situação. Considerou-se um referencial ortogonal e monométrico xOy no plano que contém as duas calhas circulares. Neste referencial, a origem é o centro das duas circunferências e a unidade corresponde a 1 decímetro.

Os dois alvos iniciam o seu movimento no mesmo instante. Seja d a distância entre eles, em decímetros, t segundos após esse instante. As variáveis d e t relacionam-se através da fórmula

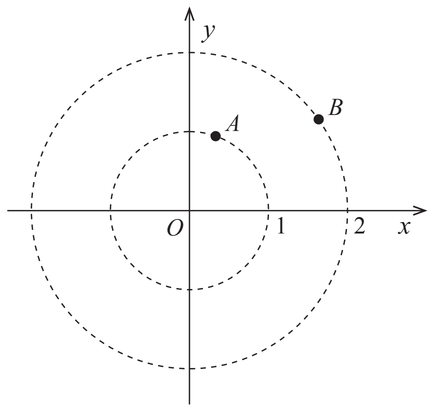

Figura 2

$$d^2 = 5 - 4\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

1.1. Admita que, no instante $t = 2$, o alvo A coincide com o ponto de coordenadas $(1, 0)$

Determine, para esse instante, as coordenadas do ponto correspondente à posição ocupada pelo alvo B.

1.2. Ao longo dos quatro primeiros segundos, houve dois instantes em que os dois alvos se encontravam à distância de 2 decímetros um do outro.

Determine quanto tempo decorreu entre esses dois instantes.

Apresente o resultado em segundos, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Para participar no jogo de tiro ao alvo, é necessário adquirir séries de cinco tiros.

A primeira série de cinco tiros custa 2 euros, a segunda custa menos 10 cêntimos do que a primeira, a terceira custa menos 10 cêntimos do que a segunda, e assim sucessivamente. Portanto, cada série de cinco tiros, após a primeira, custa menos 10 cêntimos do que a anterior.

De acordo com o estipulado pelo dono da barraca, não é permitido adquirir mais do que dez séries de cinco tiros.

2.1. Mostre que o preço a pagar pela compra das primeiras n séries de cinco tiros é dado, em euros, por

$$2{,}05n - 0{,}05n^2 \qquad (1 \leq n \leq 10)$$

2.2. O Artur pretende gastar exatamente dez euros e cinquenta cêntimos no jogo de tiro ao alvo.

Determine o número de séries de cinco tiros que o Artur vai adquirir.

2.3. Determine quanto paga, em média, por cada tiro, um jogador que adquira dez séries de cinco tiros.

Apresente o resultado em cêntimos.

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)					
I	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**		
	30	15	10	15		**70**
II	**1.**	**2.**				
	15	10				**25**
III	**1.1.**	**1.2.**	**2.**			
	10	15	15			**40**
IV	**1.1.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	
	10	15	15	15	10	**65**
TOTAL						**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 735

2.ª Fase