Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho | Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. Uma população em ambiente natural, com recursos limitantes, tende a desenvolver-se segundo um modelo logístico.

1.1. Um estudo concluiu que o número de indivíduos da população de focas de uma região dos Estados Unidos seguiu um modelo logístico desde o ano de 1975 até ao ano de 1995.

Na tabela anexa, apresenta-se, relativamente a **alguns** dos **anos** deste período, o número, y, de indivíduos dessa população x anos após o início de 1975.

Considere válido um modelo de regressão logística,

$$y = \frac{c}{1 + a\,e^{-bx}} \text{ , com } a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$$

obtido a partir dos dados da tabela.

Estime, com base nesse modelo, o número de focas existentes no início do ano de 1986.

Na sua resposta, apresente:

– os valores de a, b e c arredondados às milésimas;

– o valor pedido arredondado às unidades.

Anos após o início de 1975 (x)	**Número de focas (y)**
0	1700
1	1710
2	2008
3	2600
5	3485
6	4500
7	5250
9	5470
10	6080
12	6750
13	6890
14	7000
17	7630
18	7545
20	7485

1.2. Admita que, durante uma década, a partir de 1980, numa outra região, o número de indivíduos de outra população de focas também seguiu um modelo logístico.

Seja F a função tal que $F(t)$ é o número de focas dessa população, t anos após as zero horas do dia 1 de janeiro de 1980.

Sabe-se que o valor, arredondado às unidades, da taxa de variação média da função F, no intervalo $[2, 5]$, é 647.

Interprete, no contexto descrito, o significado deste valor.

2. Uma família vive perto de uma cidade do interior e dedica-se à produção de ração para alimentação de aves.

Diariamente, a família costuma levar para o mercado dois tipos de ração: A e B. Para esse fim, dispõe, diariamente, de 70 kg de ração do tipo A e de 50 kg de ração do tipo B.

O transporte de ração é feito numa única viagem, numa carrinha que pode levar até 100 kg de ração.

Sabe-se que a família vende, diariamente, toda a ração que transporta para o mercado.

A ração do tipo A dá o lucro de 1 euro por quilograma, e a ração do tipo B dá o lucro de 2 euros por quilograma.

2.1. Num certo dia, a família vendeu 60 kg de ração do tipo A e alguma ração do tipo B.

Verifique se o lucro obtido pela família, nesse dia, nas condições referidas, pode ter sido 150 euros.

2.2. Determine a quantidade de ração do tipo A e a quantidade de ração do tipo B que a família deve vender, diariamente, para obter o lucro diário máximo nas condições referidas.

Na sua resposta, designe por x a quantidade de ração do tipo A, em kg, vendida diariamente, e designe por y a quantidade de ração do tipo B, em kg, vendida diariamente, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

3. No verão passado, o João esteve a observar os pássaros que voavam perto da casa do avô.

Notou que, num voo planado, se um pássaro mantivesse as asas na horizontal, executava uma trajetória linear e horizontal; porém, quando inclinava as asas relativamente à horizontal e mantinha essa inclinação, descrevia um arco de circunferência num plano paralelo à horizontal.

O João investigou a situação e concluiu que o raio, r, em metros, da circunferência correspondente ao arco descrito pelo pássaro está relacionado com a amplitude, θ, em graus, do ângulo de inclinação das asas relativamente à horizontal, de acordo com a relação

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{6}{r} \quad , \text{ com } 0^\circ < \theta < 90^\circ$$

A situação está representada nos esquemas da Figura 1.

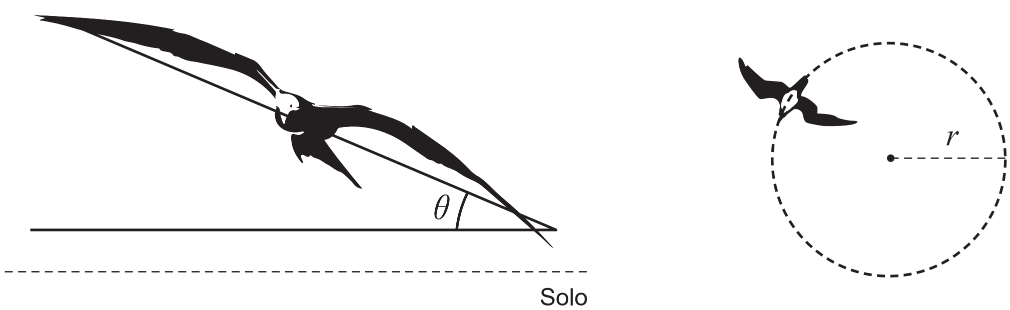

Figura 1

3.1. Admita que um daqueles pássaros descreveu uma circunferência de raio 12 m .

Determine a amplitude, θ , do ângulo de inclinação das asas do pássaro relativamente à horizontal.

Apresente o resultado em graus, arredondado às décimas.

3.2. Um dos pássaros, ao descrever um voo planado, inclinou as asas relativamente à horizontal segundo um ângulo de amplitude $\theta = 45^{\text{o}}$ e descreveu um arco de circunferência de 30^{o} de amplitude.

Na Figura 2, está representado o arco descrito pelo pássaro. Este arco tem centro no ponto O e tem extremos nos pontos A e B .

Determine o comprimento do arco descrito pelo pássaro.

Apresente o resultado, em metros, arredondado às centésimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, três casas decimais.

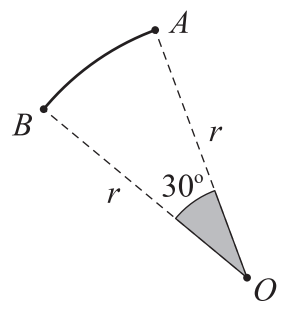

Figura 2

4. Um fio elétrico suspenso de dois postes forma uma curva designada catenária.

Admita que a catenária formada por um fio elétrico suspenso de dois postes, P e Q , distanciados 12 metros entre si, pode ser definida por

$$h(x) = 4\left(e^{0{,}125x - 0{,}75} + e^{-0{,}125x + 0{,}75}\right)$$

em que $h(x)$ é a distância ao solo, em metros, do ponto do fio situado x metros à direita do poste P , com $x \in [0, 12]$.

A Figura 3, que não está à escala, é um esquema da situação.

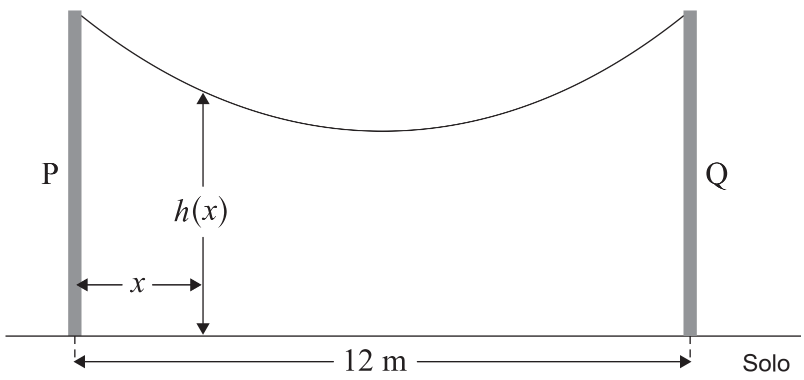

Figura 3

4.1. Verifique se os postes P e Q têm a mesma altura.

4.2. Suponha que um pássaro pousa num ponto do fio, situado mais perto do poste P do que do poste Q , a uma distância de $8{,}7$ metros do solo.

Determine a distância desse ponto do fio ao poste Q .

Apresente o resultado, em metros, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, uma casa decimal.

5. As andorinhas são aves migratórias bem conhecidas no nosso país.

Num dia de primavera, um bando de 121 andorinhas pousou nos fios elétricos de um certo local.

5.1. Admita que, nesse bando:

- a maioria das andorinhas tem mais de dois anos e nenhuma delas tem exatamente dois anos;
- o número de andorinhas com mais de dois anos e o número de andorinhas com menos de dois anos são dois termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{3}{8}$.

Determine o número de andorinhas com mais de dois anos e o número de andorinhas com menos de dois anos desse bando.

5.2. Num dado momento, as andorinhas começaram a levantar voo, sequencialmente, sem que nenhuma voltasse a pousar nos fios.

Sabe-se que foram necessárias algumas vezes até que todas as andorinhas do bando tivessem levantado voo e que o número de andorinhas que levantou voo em cada uma das vezes é dado pela expressão $2n-1$, em que n representa a ordem de cada uma dessas vezes.

Determine quantas vezes foram necessárias para que todas as andorinhas do bando tivessem levantado voo.

6. Há cinco espécies de andorinhas que podem ser observadas em Portugal, duas das quais em zonas urbanas e as restantes em zonas naturais.

Num jogo educativo, existem cinco cartões diferentes, com as espécies de andorinhas que podem ser observadas em Portugal, como se ilustra na Figura 4.

Figura 4

Retiram-se, ao acaso, sucessivamente e sem reposição, dois desses cinco cartões, e regista-se a espécie de andorinha que figura em cada um dos cartões.

Seja X a variável aleatória «número de cartões retirados com espécies que podem ser observadas em zonas urbanas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X.

7. As andorinhas de cerâmica, desenhadas pelo artista Rafael Bordallo Pinheiro e utilizadas na decoração de paredes, tornaram-se um elemento característico da cultura portuguesa.

A Figura 5 mostra uma composição de seis dessas andorinhas, dispostas de forma que cada uma delas corresponde a um vértice do hexágono regular $[ABCDEF]$, de centro no ponto H, representado na Figura 6.

Figura 5

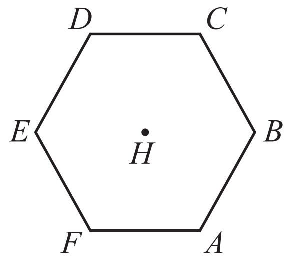

Figura 6

Considere a rotação de centro no ponto C e de amplitude -660°.

Qual é o transformado do ponto H por meio dessa rotação?

Justifique a sua resposta.

8. Há muitos anos que a anilhagem científica contribui para o estudo das aves e das suas migrações. Em Portugal, é o Centro Nacional da Anilhagem que controla essa atividade e que fornece as anilhas metálicas autorizadas para marcar as aves. O diâmetro dessas anilhas depende da espécie a que as aves pertencem, como se ilustra nas Figuras 7 e 8.

Figura 7

Figura 8

A partir de um relatório elaborado por um grupo de anilhadores do país, construiu-se o gráfico de barras da Figura 9, que apresenta as frequências absolutas acumuladas correspondentes ao diâmetro, em milímetros, das anilhas utilizadas em algumas das espécies de aves capturadas por esse grupo, num determinado ano.

Sejam $\overline{x}$ e s, respetivamente, a média e o desvio padrão da amostra representada no gráfico da Figura 9.

Determine a percentagem de anilhas utilizadas cujo diâmetro **não** pertence ao intervalo $]\overline{x}-s, \overline{x}+s[$.

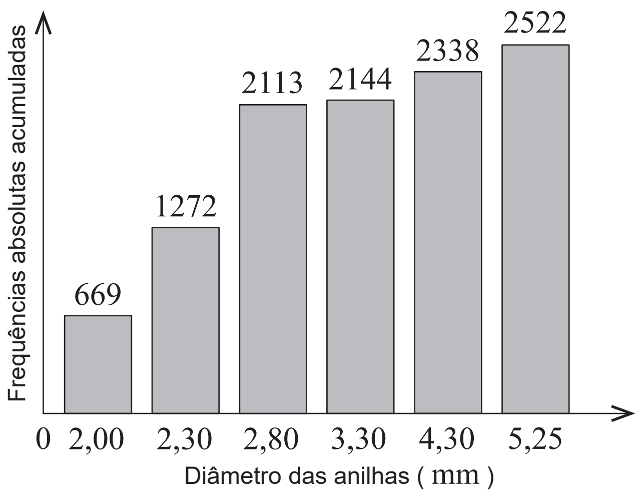

Figura 9

Na sua resposta:

– comece por determinar as frequências absolutas simples;

– apresente o valor de $\overline{x}$ e o valor de s, arredondados às centésimas;

– apresente o resultado arredondado às unidades.

9. A Felícia gosta de observar aves e acompanha frequentemente o pai nas suas funções de anilhador. Um dia, decidiu forrar com papel autocolante a superfície exterior da caixa onde guarda as quatro anilhas que o pai lhe deu como recordação de uma atividade em que participaram.

Sabe-se que:

- cada anilha tem a forma de um cilindro cujas bases têm um diâmetro exterior de $10{,}5 \text{ mm}$ e cuja altura mede $10{,}3 \text{ mm}$, como o esquema da Figura 10 ilustra;
- a caixa também tem a forma de um cilindro e tem exatamente a altura das anilhas;
- as quatro anilhas, dentro da caixa, ficam tangentes entre si e tangentes à superfície lateral interior da caixa, como o esquema da Figura 11 ilustra.

Anilha

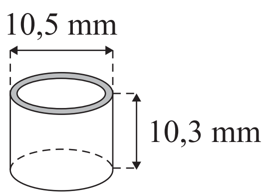

Figura 10

Vista superior da caixa com as quatro anilhas

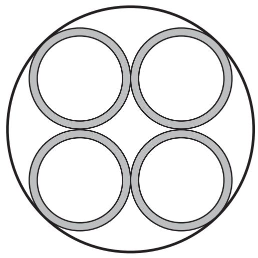

Figura 11

Determine a área total de papel autocolante que a Felícia precisa de utilizar, para forrar exteriormente a superfície lateral e a base da caixa cilíndrica onde guarda as quatro anilhas.

Apresente o resultado, em centímetros quadrados, arredondado às décimas.

Na sua resolução, considere desprezável a espessura da caixa. Poderá ser-lhe útil assinalar, na Figura 11, os centros das circunferências que representam as anilhas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, pelo menos, quatro casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

Item														TOTAL
Cotação (em pontos)														
1.1.	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	
15	10	10	20	10	20	15	15	15	10	10	10	20	20	**200**