Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 14 Páginas

---

A prova inclui 3 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.**, **2.** e **7.1.**). Dos restantes 11 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

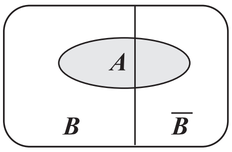
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

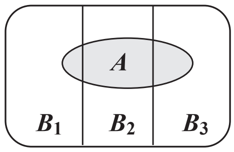
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. A Maria e os amigos estavam a planear o itinerário do *Interrail* que tencionavam fazer nas férias.

Para selecionar a cidade que visitariam a seguir a Roma, consultaram diversos blogues de viagens. Num deles, o autor apresentava as listas de preferências de 23 pessoas que tinham visitado Itália.

Com estas listas, construíram a tabela seguinte, na qual a lista de preferências de cada uma das 23 pessoas equivale a um voto.

Tabela 1

Preferências \ **Votos**	**8**	**7**	**5**	**3**
1.ª	Veneza	Florença	Milão	Nápoles
2.ª	Florença	Milão	Nápoles	Veneza
3.ª	Nápoles	Veneza	Florença	Milão
4.ª	Milão	Nápoles	Veneza	Florença

A seleção da cidade resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de votos em cada cidade, como primeira preferência, e verifica-se se alguma delas obtém a maioria absoluta. Caso isso se verifique, essa cidade é a vencedora.
- Caso contrário, elimina-se a cidade menos votada como primeira preferência. Em seguida, a tabela de preferências é reestruturada, e, em cada coluna, as cidades que ocupavam os lugares abaixo da cidade eliminada sobem uma linha, mantendo-se pela mesma ordem.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à nova tabela de preferências obtida no ponto anterior.
- O processo repete-se até que uma das cidades obtenha a maioria absoluta na primeira preferência.

Indique a cidade que a Maria e os amigos planeiam visitar a seguir a Roma.

Na sua resposta, aplique o método anteriormente descrito, apresentando todos os cálculos efetuados.

2. A Maria, o Carlos, a Elsa, o Pedro e a Sara pretendem visitar França durante o seu *Interrail*. Para prepararem a viagem, decidem pesquisar sobre o país. Como todos querem dar o seu contributo na pesquisa e têm pouco tempo para a realizar, decidem dividir o mapa do país em cinco parcelas, ficando cada um responsável pela recolha de informação sobre uma das parcelas.

Os cinco amigos acordaram entre si que o algoritmo a seguir descrito proporcionaria uma divisão justa do mapa do país.

1.º passo: Atribui-se, aleatoriamente, uma ordem aos amigos. Considere-se que a ordem atribuída foi A, B, C, D e E.

2.º passo: O amigo A delimita uma parcela do mapa que considera corresponder a $\frac{1}{5}$ do total, visto serem cinco os intervenientes iniciais, e entrega a parcela em causa ao amigo B.

3.º passo: O amigo B pronuncia-se, concordando com a divisão efetuada ou dela discordando:

- se considera que a parcela que lhe foi entregue é $\frac{1}{5}$ do mapa (ou menos), passa a vez ao amigo seguinte, entregando-lhe a parcela em causa;
- se considera que a parcela que lhe foi entregue é mais do que $\frac{1}{5}$ do mapa, retifica-a (retirando-lhe uma parte) e passa a vez ao amigo seguinte, entregando-lhe a parcela em causa.

4.º passo: O amigo C repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao amigo D.

5.º passo: O amigo D repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao amigo E.

6.º passo: O amigo E pronuncia-se:

- se concorda com a divisão efetuada, atribui a parcela resultante de todo este processo ao último amigo que tenha retificado a parcela, ou, se ninguém a tiver retificado, entrega-a ao amigo A;
- se discorda da divisão efetuada, retifica a parcela, e esta é-lhe entregue.

Termina assim a primeira volta, saindo o amigo que acabou de receber a parcela.

7.º passo: A segunda volta faz-se com o que resta do mapa e inicia-se no amigo a seguir ao que acabou de receber a parcela na volta anterior, mantendo-se a ordem entre os restantes amigos.

8.º passo: Realizam-se as voltas necessárias, sempre com um amigo a menos do que na volta anterior, até que restem apenas dois amigos. Quando isso acontecer, um divide e o outro escolhe. Termina, assim, a divisão do mapa pelos cinco amigos.

Para a divisão do mapa, a ordem atribuída aleatoriamente foi: Carlos, Maria, Elsa, Pedro e Sara.

Admita que:

- na primeira volta, apenas a Elsa e o Pedro retificaram a parcela do mapa;
- a Elsa não voltou a retificar;
- o Carlos só retificou uma vez, quando a Elsa começou a volta;
- a Elsa começou a 3.ª volta.

Identifique, justificando, os amigos a quem foram atribuídas parcelas do mapa nas primeiras três voltas.

3. A Elsa, que em 2018 fez um *Interrail*, relatou à Maria a sua viagem, explicando-lhe também algumas dificuldades na sua organização.

Uma das dificuldades foi decidir que países visitariam e, em cada país, a quantas cidades iriam.

O grupo de amigos da Elsa acabou por decidir que visitariam a Alemanha, a Áustria, a França, a Itália e a Suíça e que, em cada país, iriam apenas a uma cidade.

Na Tabela 2, apresentam-se as distâncias, em quilómetros, entre as cidades que o grupo considerou mais atrativas e os países a que pertencem.

Tabela 2

		Cidades	Viena	Salzburgo	Paris	Milão	Veneza	Zurique
Países	Alemanha	Munique	430	140	800	500	520	340
	Áustria	Viena		290	1230	860	600	740
		Salzburgo			980	530	460	450
	França	Paris				850	1100	650
	Itália	Milão					270	280
		Veneza						540
	Suíça	Zurique						

Os amigos acordaram que o percurso a realizar seria definido partindo de um grafo no qual duas cidades são interligadas se não pertencerem ao mesmo país, selecionando-se apenas uma cidade de cada país e atendendo ao seguinte algoritmo:

- escolher a aresta do grafo com menor peso, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as arestas de menor peso, garantindo que três arestas do percurso que está a ser definido não se encontram num mesmo vértice e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os vértices sejam incluídos.

Apresente um percurso possível, definido pelo grupo de amigos da Elsa, com início e fim na cidade de Paris.

Na sua resposta, apresente:

– a ordenação das arestas selecionadas pelo algoritmo descrito;

– um grafo que resulte da aplicação do algoritmo;

– um percurso que o grupo de amigos da Elsa poderá ter definido.

4. No planeamento de uma viagem, a Maria e quatro amigos pesquisaram, *online*, os diferentes preços para um mesmo alojamento praticados por quatro plataformas de reserva, A, B, C e D.

Depois da pesquisa, selecionaram dois hotéis, H1 e H2.

Na Figura 1, observa-se parte de um mapa da cidade que vão visitar, no qual estão assinaladas:

- a localização dos hotéis e os preços por noite, para um grupo de cinco pessoas, nas 4 plataformas;
- as zonas de transportes públicos, 1, 2 e 3.

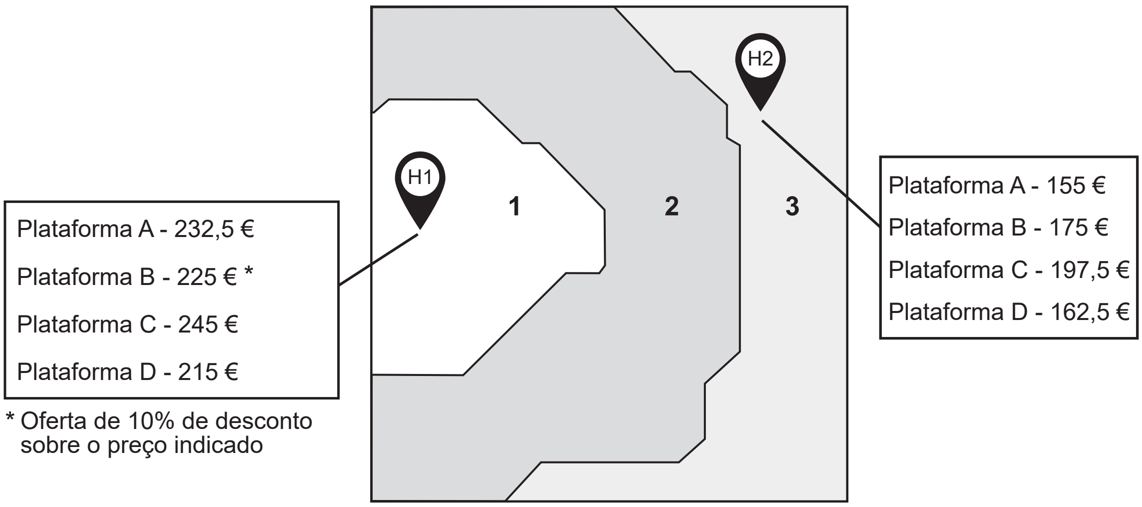


Figura 1

O grupo de amigos pretende visitar o centro da cidade, que se situa na zona 1. Como tal, se os amigos reservarem o hotel H1, podem deslocar-se a pé. Caso reservem o hotel H2, terão de comprar um passe turístico para se deslocarem de transporte público desde a zona do hotel até ao centro da cidade.

Na Tabela 3, indicam-se os preços dos passes turísticos, por pessoa, em função das zonas e dos dias de utilização dos passes.

Tabela 3

N.º de dias	Zonas de 1 a 2	Zonas de 1 a 3
1 dia	10,55 €	22,20 €
2 dias	17,15 €	33,70 €
3 dias	23,40 €	47,25 €

Um dos amigos efetuou cálculos, de modo a encontrar a solução mais económica para permanecerem na cidade duas noites e, se tal fosse o caso, adquirirem um passe turístico para três dias.

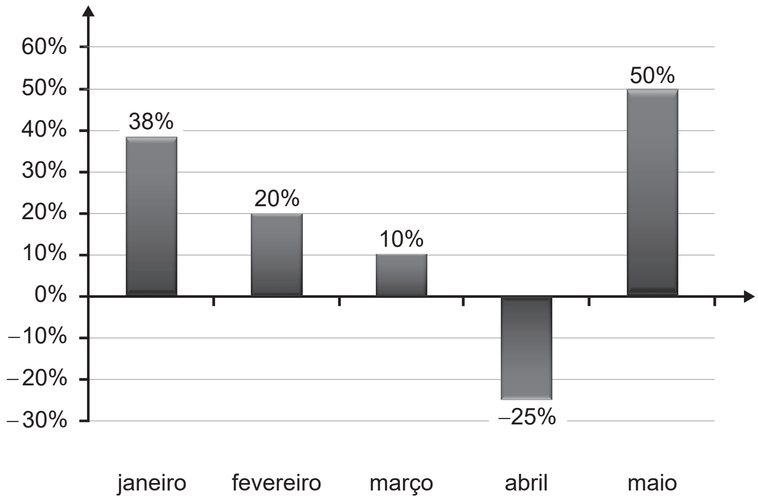
Qual é o hotel, H1 ou H2, que o grupo deve selecionar?

Na sua resposta, apresente o custo total da estadia na cidade, para o grupo dos 5 amigos, caso os amigos fiquem no hotel H1 e caso fiquem no hotel H2.

5. Um hotel divulgou, no final do mês de maio de 2019, a variação do número de quartos ocupados em cada mês, relativamente ao mês anterior.

No Gráfico 1, apresentam-se os dados recolhidos, em percentagem.

Gráfico 1



No mês de abril, o hotel registou uma ocupação de 198 quartos.

Quantos quartos foram ocupados no mês de março?

(A) 228 **(B)** 264 **(C)** 267 **(D)** 792

6. Num dos dias do *Interrail*, a Elsa sentiu-se febril. Mediu a temperatura corporal e, como estava com febre, tomou um medicamento e ficou no quarto do hotel.

Admita que a temperatura corporal da Elsa, em graus Celsius ($^{\circ}C$), t horas após a toma do medicamento, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$$C(t) = 26 + 13e^{-0,008t} \qquad \text{para } t \in [0, 24]$$

Considera-se $t = 0$ o instante em que a Elsa tomou o medicamento.

6.1. Admita que a Elsa tomou o medicamento às 9 horas.

Se às 14 horas e 30 minutos a temperatura corporal da Elsa não tivesse diminuído, pelo menos, $0,5\ ^{\circ}C$, seria necessário recorrer a outro medicamento.

Indique, justificando, se terá sido necessário recorrer a outro medicamento.

Na sua resposta, apresente todos os cálculos que efetuar.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

6.2. Preocupados com a Elsa, os amigos foram telefonando ao longo do dia.

Num dos telefonemas, a Elsa disse-lhes que a sua temperatura corporal era $38\ ^{\circ}C$ e, no telefonema seguinte, disse-lhes que já era $37,8\ ^{\circ}C$.

Quanto tempo decorreu entre os dois telefonemas?

Apresente o resultado, em horas, arredondado às unidades.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) com arredondamento às décimas.

7. Um dos aspetos mais importantes para que um *Interrail* decorra de acordo com o planeado é o cumprimento dos horários dos comboios.

7.1. Na Tabela 4, estão parcialmente registados os dados relativos aos tempos de atraso de comboios, em minutos, arredondados à unidade.

Tabela 4

Tempo de atraso (min)	**N.º de comboios**	**Frequência absoluta acumulada**
0		2
2		14
4	a	
5	13	37
b	13	
15		
17		100

Admita que a mediana do conjunto de dados apresentados na Tabela 4 é 11 minutos e que todos os valores em falta na tabela são diferentes de zero.

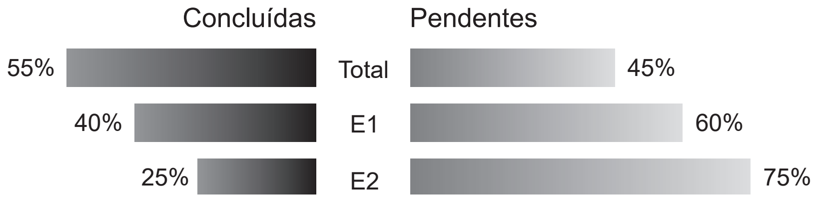
Determine os valores de a e de b.

7.2. O atraso dos comboios é um dos motivos que levam os clientes a apresentarem reclamações. Uma companhia ferroviária apresentou, no seu relatório de qualidade do ano 2019, o ponto de situação relativamente às reclamações apresentadas. Estas foram classificadas como concluídas (respondidas) ou pendentes (a aguardar resposta).

No Gráfico 2, indicam-se os dados referentes ao total das reclamações apresentadas e às apresentadas em duas das estações, E1 e E2.

Gráfico 2

Estado das reclamações apresentadas



7.2.1. Sabe-se que, do conjunto das reclamações apresentadas em todas as estações daquela companhia, 13 680 se encontram pendentes e que, do total das reclamações apresentadas, 40% são da estação E2.

Quantas reclamações apresentadas na estação E2 estão pendentes?

7.2.2. Foram selecionadas, ao acaso, duas das reclamações apresentadas.

A primeira foi escolhida de entre as apresentadas na estação E1 e a segunda foi escolhida de entre as apresentadas na estação E2.

Qual é a probabilidade de ambas se encontrarem no mesmo estado?

(A) $0{,}1$ **(B)** $0{,}45$ **(C)** $0{,}55$ **(D)** $0{,}88$

8. Sempre que viaja, a Maria efetua as reservas dos alojamentos utilizando quatro plataformas *online*, A, B, C e D, e nunca cancela nenhuma das reservas que efetua.

Na Figura 2, apresenta-se o gráfico circular construído com base nas reservas efetuadas pela Maria em cada uma das plataformas, no qual estão registadas as amplitudes dos sectores circulares que o compõem.

Reservas efetuadas por plataforma

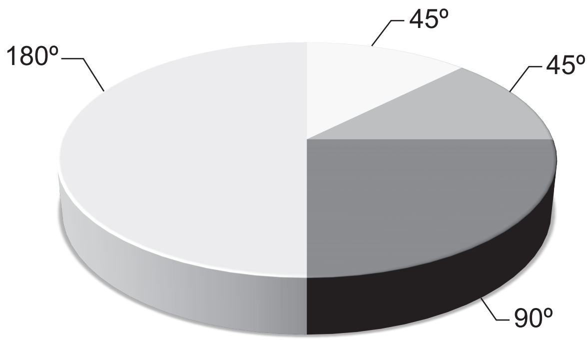


Figura 2

8.1. Depois da estadia, a Maria avalia, através da plataforma de reservas, a qualidade dos serviços prestados em cada um dos alojamentos.

Sabe-se que:

- um dos sectores de menor amplitude do gráfico circular apresentado na Figura 2 corresponde às reservas efetuadas na plataforma A;
- quando fica em alojamentos reservados através da plataforma A, a Maria atribui ao alojamento a classificação de Muito Bom em metade dos casos;
- quando não fica em alojamentos reservados através da plataforma A, a Maria atribui ao alojamento a classificação de Muito Bom em apenas um de cada sete casos.

Escolhe-se, ao acaso, um alojamento a que Maria atribuiu Muito Bom.

Determine a probabilidade de esse alojamento ter sido reservado através da plataforma A.

8.2. Admita que, do gráfico circular apresentado na Figura 2, o sector cuja amplitude é 90° corresponde às reservas efetuadas na plataforma C.

Das reservas que a Maria efetua:

- 10 são reservas realizadas na plataforma C;
- 30% são para alojamentos no estrangeiro;
- 20% são reservas realizadas na plataforma C e para alojamentos no estrangeiro.

Determine o número de reservas que não são realizadas através da plataforma C nem são para um alojamento no estrangeiro.

9. No final de um ano, fez-se um estudo estatístico relativo à variável aleatória «duração, em minutos, da viagem de comboio entre as estações E1 e E2».

Essa variável é bem modelada por uma distribuição normal com valor médio μ e desvio padrão σ.

Escolhe-se, aleatoriamente, uma das viagens.

Admita que a probabilidade de essa viagem ter uma duração até 43 minutos é, aproximadamente, 0,72.

Qual pode ser o valor médio e o desvio padrão da variável em estudo?

(A) $\mu = 36 \,;\, \sigma = 3$ **(B)** $\mu = 39 \,;\, \sigma = 3$ **(C)** $\mu = 36 \,;\, \sigma = 7$ **(D)** $\mu = 39 \,;\, \sigma = 7$

10. Numa amostra aleatória de 256 pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019 verificou-se que, em média, visitaram 5 países e que o valor do desvio padrão dessa amostra é de 3,9.

Obtenha a margem de erro de um intervalo de confiança a 99% para o número médio de países visitados pelas pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 3 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="4">1.</td><td colspan="4">2.</td><td colspan="3">7.1.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="4">20</td><td colspan="4">18</td><td colspan="3">18</td><td>56</td></tr>
<tr><td>Destes 11 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>3.</td><td>4.</td><td>5.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td>7.2.1.</td><td>7.2.2.</td><td>8.1.</td><td>8.2.</td><td>9.</td><td>10.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="11">8 x 18 pontos</td><td>144</td></tr>
<tr><td colspan="12">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

2.ª Fase

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Entrelinha 1,5, sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 17 Páginas

A prova inclui 3 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **1.**, **2.** e **7.1.**). Dos restantes 11 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Item obrigatório

1. A Maria e os amigos estavam a planear o itinerário do *Interrail* que tencionavam fazer nas férias.

Para selecionar a cidade que visitariam a seguir a Roma, consultaram diversos blogues de viagens. Num deles, o autor apresentava as listas de preferências de 23 pessoas que tinham visitado quatro cidades de Itália: Florença (F), Milão (M), Nápoles (N) e Veneza (V).

Com estas listas, construíram a tabela seguinte, na qual a lista de preferências de cada uma das 23 pessoas equivale a um voto.

Tabela 1

Preferências	Votos			
	8	7	5	3
1.ª	V	F	M	N
2.ª	F	M	N	V
3.ª	N	V	F	M
4.ª	M	N	V	F

A seleção da cidade resultou da aplicação do método a seguir descrito.

- Efetua-se a contagem do número de votos em cada cidade, como primeira preferência, e verifica-se se alguma delas obtém a maioria absoluta. Caso isso se verifique, essa cidade é a vencedora.
- Caso contrário, elimina-se a cidade menos votada como primeira preferência. Em seguida, a tabela de preferências é reestruturada, e, em cada coluna, as cidades que ocupavam os lugares abaixo da cidade eliminada sobem uma linha, mantendo-se pela mesma ordem.
- Os procedimentos anteriores são aplicados à nova tabela de preferências obtida no ponto anterior.
- O processo repete-se até que uma das cidades obtenha a maioria absoluta na primeira preferência.

Indique a cidade que a Maria e os amigos planeiam visitar a seguir a Roma.

Na sua resposta, aplique o método anteriormente descrito, apresentando todos os cálculos efetuados.

Item obrigatório

2. A Maria, o Carlos, a Elsa, o Pedro e a Sara pretendem visitar França durante o seu *Interrail*. Para prepararem a viagem, decidem pesquisar sobre o país. Como todos querem dar o seu contributo na pesquisa e têm pouco tempo para a realizar, decidem dividir o mapa do país em cinco parcelas, ficando cada um responsável pela recolha de informação sobre uma das parcelas.

Os cinco amigos acordaram entre si que o algoritmo a seguir descrito proporcionaria uma divisão justa do mapa do país.

1.º passo: Atribui-se, aleatoriamente, uma ordem aos amigos. Considere-se que a ordem atribuída foi A, B, C, D e E.

2.º passo: O amigo A delimita uma parcela do mapa que considera corresponder a $\frac{1}{5}$ do total, visto serem cinco os intervenientes iniciais, e entrega a parcela em causa ao amigo B.

3.º passo: O amigo B pronuncia-se, concordando com a divisão efetuada ou dela discordando:

- se considera que a parcela que lhe foi entregue é $\frac{1}{5}$ do mapa (ou menos), passa a vez ao amigo seguinte, entregando-lhe a parcela em causa;
- se considera que a parcela que lhe foi entregue é mais do que $\frac{1}{5}$ do mapa, retifica-a (retirando-lhe uma parte) e passa a vez ao amigo seguinte, entregando-lhe a parcela em causa.

4.º passo: O amigo C repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao amigo D.

5.º passo: O amigo D repete o procedimento do 3.º passo e entrega a parcela em causa ao amigo E.

6.º passo: O amigo E pronuncia-se:

- se concorda com a divisão efetuada, atribui a parcela resultante de todo este processo ao último amigo que tenha retificado a parcela, ou, se ninguém a tiver retificado, entrega-a ao amigo A;
- se discorda da divisão efetuada, retifica a parcela, e esta é-lhe entregue.

Termina assim a primeira volta, saindo o amigo que acabou de receber a parcela.

7.º passo: A segunda volta faz-se com o que resta do mapa e inicia-se no amigo a seguir ao que acabou de receber a parcela na volta anterior, mantendo-se a ordem entre os restantes amigos.

8.º passo: Realizam-se as voltas necessárias, sempre com um amigo a menos do que na volta anterior, até que restem apenas dois amigos. Quando isso acontecer, um divide e o outro escolhe. Termina, assim, a divisão do mapa pelos cinco amigos.

Para a divisão do mapa, a ordem atribuída aleatoriamente foi: Carlos, Maria, Elsa, Pedro e Sara.

Admita que:

- na primeira volta, apenas a Elsa e o Pedro retificaram a parcela do mapa;
- a Elsa não voltou a retificar;
- o Carlos só retificou uma vez, quando a Elsa começou a volta;
- a Elsa começou a 3.ª volta.

Identifique, justificando, os amigos a quem foram atribuídas parcelas do mapa nas primeiras três voltas.

3. A Elsa, que em 2018 fez um *Interrail*, relatou à Maria a sua viagem, explicando-lhe também algumas dificuldades na sua organização.

Uma das dificuldades foi decidir que países visitariam e, em cada país, a quantas cidades iriam.

O grupo de amigos da Elsa acabou por decidir que visitariam a Alemanha, a Áustria, a França, a Itália e a Suíça e que, em cada país, iriam apenas a uma cidade.

Admita que optaram por visitar:

– Munique, na Alemanha;

– Paris, em França;

– Zurique, na Suíça;

– Ou Viena ou Salzburgo, na Áustria;

– Ou Milão ou Veneza, em Itália.

Na Tabela 2, apresentam-se as distâncias, em quilómetros, entre as cidades que o grupo considerou mais atrativas.

Tabela 2

Munique / Viena – 430
Munique / Salzburgo – 140
Munique / Paris – 800
Munique / Milão – 500
Munique / Veneza – 520
Munique / Zurique – 340
Viena / Salzburgo – 290
Viena / Paris – 1230
Viena / Milão – 860
Viena / Veneza – 600
Viena / Zurique – 740
Salzburgo / Paris – 980
Salzburgo / Milão – 530
Salzburgo / Veneza – 460
Salzburgo / Zurique – 450
Paris / Milão – 850
Paris / Veneza – 1100
Paris / Zurique – 650
Milão / Veneza – 270
Milão / Zurique – 280
Veneza / Zurique – 540

Os amigos acordaram que o percurso a realizar seria definido selecionando-se apenas uma cidade de cada país e atendendo ao seguinte algoritmo:

- escolher a menor distância entre cidades, qualquer que ela seja;
- escolher, sucessivamente, as menores distâncias, garantindo que, partindo da mesma cidade, são selecionadas, no máximo, duas distâncias e não permitindo que se fechem percursos sem que todos os países sejam visitados.

Apresente um percurso possível, definido pelo grupo de amigos da Elsa, com início e fim na cidade de Paris.

Na sua resposta, apresente:

– a ordenação das distâncias selecionadas pelo algoritmo descrito;

– um percurso que o grupo de amigos da Elsa poderá ter definido.

4. No planeamento de uma viagem a uma cidade, a Maria e quatro amigos pesquisaram, *online*, os diferentes preços para um mesmo alojamento praticados por quatro plataformas de reserva, A, B, C e D.

Depois da pesquisa, selecionaram dois hotéis, H1 e H2.

Nas Tabelas 3 e 4 apresentam-se, respetivamente, os preços por noite, para um grupo de cinco pessoas, nas 4 plataformas, para os hotéis H1 e H2.

Tabela 3

Plataforma	Preço para o hotel H1
A	232,5 €
B	225 € *
C	245 €
D	215 €

* Oferta de 10% de desconto sobre o preço indicado.

Tabela 4

Plataforma	Preço para o hotel H2
A	155 €
B	175 €
C	197,5 €
D	162,5 €

A cidade está dividida em três zonas de transportes públicos, 1, 2 e 3, situando-se o hotel H1 na zona 1 e o hotel H2 na zona 3.
O grupo de amigos pretende visitar o centro da cidade, que se situa na zona 1. Como tal, se os amigos reservarem o hotel H1, podem deslocar-se a pé. Caso reservem o hotel H2, terão de comprar um passe turístico para se deslocarem de transporte público desde a zona do hotel até ao centro da cidade.

Nas Tabelas 5 e 6, indicam-se os preços dos passes turísticos, por pessoa, em função das zonas e dos dias de utilização dos passes.

Tabela 5

N.º de dias	Zonas de 1 a 2
1 dia	10,55 €
2 dias	17,15 €
3 dias	23,40 €

Tabela 6

N.º de dias	Zonas de 1 a 3
1 dia	22,20 €
2 dias	33,70 €
3 dias	47,25 €

Um dos amigos efetuou cálculos, de modo a encontrar a solução mais económica para permanecerem na cidade duas noites e, se tal fosse o caso, adquirirem um passe turístico para três dias.

Qual é o hotel, H1 ou H2, que o grupo deve selecionar?

Na sua resposta, apresente o custo total da estadia na cidade, para o grupo dos 5 amigos, caso os amigos fiquem no hotel H1 e caso fiquem no hotel H2.

5. Um hotel divulgou, no final do mês de maio de 2019, a variação do número de quartos ocupados em cada mês, relativamente ao mês anterior.

Na Tabela 7, apresentam-se os dados recolhidos, em percentagem.

Tabela 7

Mês	Variação
Março	10%
Abril	– 25%
Maio	50%

No mês de abril, o hotel registou uma ocupação de 198 quartos.

Quantos quartos foram ocupados no mês de março?

a) 228

b) 264

c) 267

d) 792

6. Num dos dias do *Interrail*, a Elsa sentiu-se febril. Mediu a temperatura corporal e, como estava com febre, tomou um medicamento e ficou no quarto do hotel.

Admita que a temperatura corporal da Elsa, em graus Celsius (ºC), t horas após a toma do medicamento, é bem aproximada pelo modelo seguinte.

$C(t) = 26 + 13e^{-0,008t}$ para $t \in [0, 24]$

Considera-se $t = 0$ o instante em que a Elsa tomou o medicamento.

6.1. Admita que a Elsa tomou o medicamento às 9 horas.

Se às 14 horas e 30 minutos a temperatura corporal da Elsa não tivesse diminuído, pelo menos, $0,5$ ºC, seria necessário recorrer a outro medicamento.

Indique, justificando, se terá sido necessário recorrer a outro medicamento.

Na sua resposta, apresente todos os cálculos que efetuar.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

6.2. Preocupados com a Elsa, os amigos foram telefonando ao longo do dia.

Num dos telefonemas, a Elsa disse-lhes que a sua temperatura corporal era 38 ºC.

Quanto tempo decorreu entre a toma do medicamento e esse telefonema?

Apresente o resultado, em horas, arredondado às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

7. Um dos aspetos mais importantes para que um *Interrail* decorra de acordo com o planeado é o cumprimento dos horários dos comboios.

Item obrigatório

7.1. Na Tabela 8, estão parcialmente registados os dados relativos aos tempos de atraso de comboios, em minutos, arredondados à unidade.

Tabela 8

Tempo de atraso (min)	N.º de comboios	Frequência absoluta acumulada
0		2
2		14
4	a	
5	13	37
b	13	
15		
17		100

Admita que a mediana do conjunto de dados apresentados na Tabela 8 é 11 minutos e que todos os valores em falta na tabela são diferentes de zero.

Determine os valores de a e de b.

7.2. O atraso dos comboios é um dos motivos que levam os clientes a apresentarem reclamações. Uma companhia ferroviária apresentou, no seu relatório de qualidade do ano 2019, o ponto de situação relativamente às reclamações apresentadas. Estas foram classificadas como concluídas (respondidas) ou pendentes (a aguardar resposta).

Na Tabela 9, indicam-se os dados referentes ao total das reclamações apresentadas e às apresentadas em duas das estações, E1 e E2.

Tabela 9

	Estado	
	Concluídas	Pendentes
Total	55%	45%
Estação E1	40%	60%
Estação E2	25%	75%

7.2.1. Sabe-se que, do conjunto das reclamações apresentadas em todas as estações daquela companhia, 13 680 se encontram pendentes e que, do total das reclamações apresentadas, 40% são da estação E2.

Quantas reclamações apresentadas na estação E2 estão pendentes?

7.2.2. Foram selecionadas, ao acaso, duas das reclamações apresentadas.

A primeira foi escolhida de entre as apresentadas na estação E1 e a segunda foi escolhida de entre as apresentadas na estação E2.

Qual é a probabilidade de ambas se encontrarem no mesmo estado?

a) $0{,}1$

b) $0{,}45$

c) $0{,}55$

d) $0{,}88$

8. Sempre que viaja, a Maria efetua as reservas dos alojamentos utilizando quatro plataformas *online*, A, B, C e D, e nunca cancela nenhuma das reservas que efetua.

Com base nas reservas efetuadas pela Maria em cada uma das plataformas, construiu-se um gráfico circular dividido em quatro sectores circulares, dois deles com amplitude de 45^{o}, um com amplitude de 90^{o} e um com amplitude de 180^{o}.

8.1. Depois da estadia, a Maria avalia, através da plataforma de reservas, a qualidade dos serviços prestados em cada um dos alojamentos.

Sabe-se que:

- um dos sectores de menor amplitude do gráfico circular corresponde às reservas efetuadas na plataforma A;
- quando fica em alojamentos reservados através da plataforma A, a Maria atribui ao alojamento a classificação de Muito Bom em metade dos casos;
- quando não fica em alojamentos reservados através da plataforma A, a Maria atribui ao alojamento a classificação de Muito Bom em apenas um de cada sete casos.

Escolhe-se, ao acaso, um alojamento a que Maria atribuiu Muito Bom.

Determine a probabilidade de esse alojamento ter sido reservado através da plataforma A.

8.2. Admita que, do gráfico circular descrito, o sector cuja amplitude é 90° corresponde às reservas efetuadas na plataforma C.

Das reservas que a Maria efetua:

- 10 são reservas realizadas na plataforma C;
- 30% são para alojamentos no estrangeiro;
- 20% são reservas realizadas na plataforma C e para alojamentos no estrangeiro.

Determine o número de reservas que não são realizadas através da plataforma C nem são para um alojamento no estrangeiro.

9. No final de um ano, fez-se um estudo estatístico relativo à variável aleatória «duração, em minutos, da viagem de comboio entre as estações E1 e E2».

Essa variável é bem modelada por uma distribuição normal com valor médio μ e desvio padrão σ.

Escolhe-se, aleatoriamente, uma das viagens.

Admita que a probabilidade de essa viagem ter uma duração até 43 minutos é, aproximadamente, 0,72.

Qual pode ser o valor médio e o desvio padrão da variável em estudo?

a) $\mu = 36 \,;\, \sigma = 3$

b) $\mu = 39 \,;\, \sigma = 3$

c) $\mu = 36 \,;\, \sigma = 7$

d) $\mu = 39 \,;\, \sigma = 7$

10. Numa amostra aleatória de 256 pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019 verificou-se que, em média, visitaram 5 países e que o valor do desvio padrão dessa amostra é de 3,9.

Obtenha a margem de erro de um intervalo de confiança a 99% para o número médio de países visitados pelas pessoas que realizaram apenas um *Interrail* em 2019.

Apresente o resultado com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 3 itens contribuem obrigatoriamente para a classificação final da prova

1. .... 20 pontos

2. .... 18 pontos

7.1. .... 18 pontos

SUBTOTAL .... 56 pontos

Dos restantes 11 itens, contribuem para a classificação final da prova os 8 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação (8 x 18 pontos = 144 pontos)

3., 4., 5., 6.1., 6.2., 7.2.1. , 7.2.2., 8.1., 8.2., 9., 10.

TOTAL .... 200 pontos

Formulário

Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Probabilidades

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$

$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Distribuição normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral σ – desvio padrão da variável z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$
n – dimensão da amostra $\overline{x}$ – média amostral s – desvio padrão amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma determinada proporção, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$\left]p - z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}},\quad p + z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right[$
n – dimensão da amostra p – proporção amostral z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	z
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576