REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2020

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 2 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final (itens **4.1.** e **4.2.**). Dos restantes 12 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 9 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. Admita que, durante um determinado período, a pressão atmosférica na zona da estância de esqui da Serra da Estrela pode ser dada, aproximadamente, por

$$p(x) = 1013{,}25\,e^{\left(-\frac{x}{8}\right)} \text{ , com } 1{,}8 \leq x \leq 2{,}0$$

em que $p(x)$ é a pressão atmosférica, em hPa (hectopascal), a x **quilómetros** de altitude.

1.1. Num certo local da estância, registou-se a pressão atmosférica de $799\ \mathrm{hPa}$.

Determine a altitude desse local, de acordo com o modelo apresentado.

Apresente o resultado em **metros**, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, cinco casas decimais.

1.2. Quando um esquiador desce a pista da Torre, na estância de esqui da Serra da Estrela, começa o percurso a 1983 **metros** de altitude e termina-o a 1851 **metros** de altitude.

Determine a diferença entre a pressão no local em que um esquiador termina a descida da pista da Torre e a pressão no local em que inicia a descida, de acordo com o modelo apresentado.

Apresente o resultado em hPa , arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

2. O André vive no concelho de Mirandela, na zona da Serra de Santa Comba, onde pratica BTT.

2.1. Num determinado dia, partiu de casa, de bicicleta, com destino a uma unidade de turismo rural.

Admita que a distância, em quilómetros, que o André percorreu em cada hora do seu percurso, desde casa até à unidade de turismo rural, é dada pela expressão $-2{,}5n + 37{,}5$, em que n representa a ordem de cada uma dessas horas.

2.1.1. Justifique que a expressão apresentada pode ser o termo geral de uma progressão aritmética.

Na sua resposta, identifique a razão dessa progressão.

2.1.2. O percurso feito pelo André, desde a sua casa até à unidade de turismo rural, foi, no total, de $225\ \mathrm{km}$.

Que distância deste percurso lhe faltava percorrer quando completou a oitava hora do mesmo?

Justifique a sua resposta.

2.2. Seja X a variável aleatória «número de treinos de BTT que o André faz por semana».

A tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X é

x_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = x_i)$	0,05	0,18	0,33	a	b	0,10

em que a e b representam números reais.

Sabe-se que é tão provável o André fazer quatro treinos por semana como não fazer nenhum treino.

Determine quantos treinos de BTT é de esperar que o André faça durante uma semana.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

3. A Figura 1 mostra o gráfico da evolução da população residente no concelho de Mirandela, no período compreendido entre o ano de 1900 e o ano de 2011, de acordo com dados de censos populacionais, disponíveis no sítio do Instituto Nacional de Estatística.

No gráfico, são referenciados alguns dos anos daquele período, com indicação do respetivo número de residentes. Relativamente ao ano de 1991, esse número está representado pela letra R .

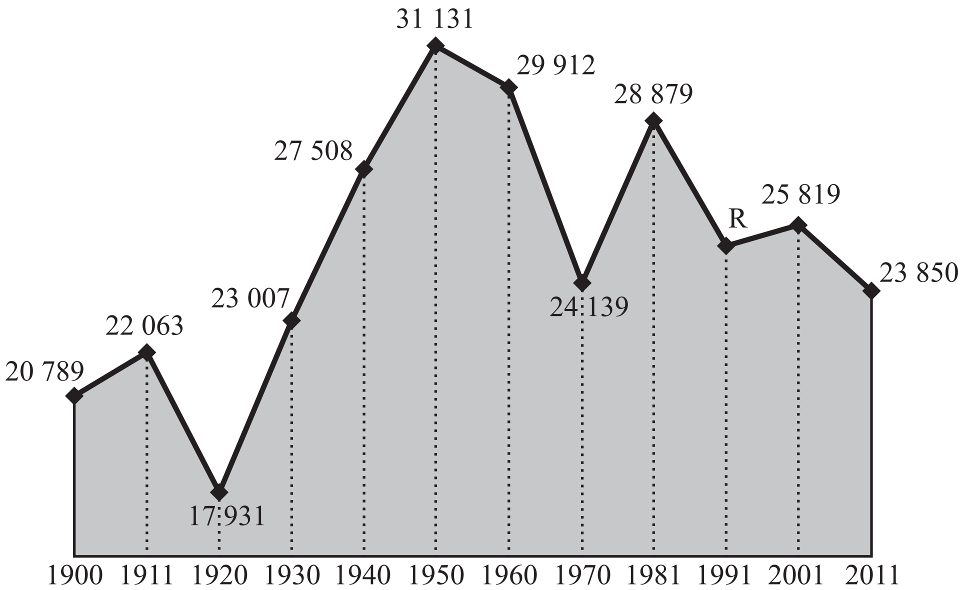

Figura 1

Sabe-se que a mediana desta amostra é igual a $24\,674$.

Considere $\overline{x}$ e s , respetivamente, a média e o desvio padrão da amostra apresentada.

Em que anos, dos registados no gráfico, o número de residentes **não** pertenceu ao intervalo $]\overline{x} - s, \overline{x} + s[$?

Na sua resposta:

– comece por justificar que $\mathrm{R} = 25\,209$;

– apresente o valor de $\overline{x}$ e o valor de s , arredondados às centésimas.

4. A estátua «A menina e a pomba», situada em Mirandela, está assente numa estrutura com a forma de um tronco de pirâmide quadrangular regular, como se observa na fotografia da Figura 2.

Figura 2

Na Figura 3, que não está à escala, estão representados o tronco de pirâmide $[ABCDEFGH]$ e a pirâmide $[ABCDV]$, da qual se obteve esse tronco por um corte paralelo à base.

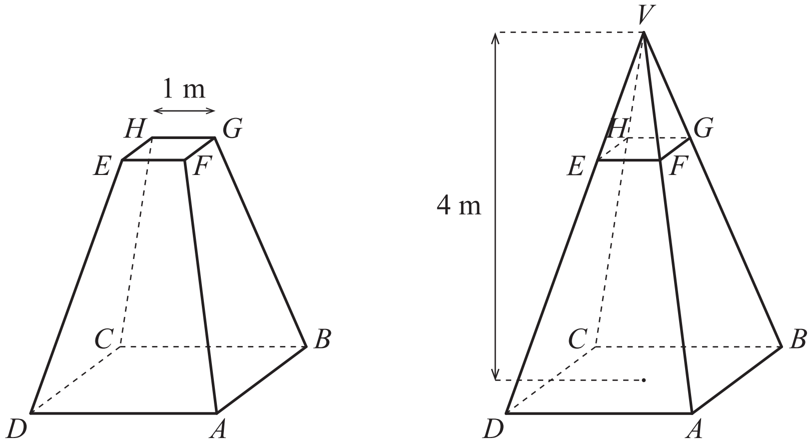

Figura 3

Admita que:

- a altura da pirâmide da qual se obteve o tronco é $4\ \mathrm{m}$;
- a altura do tronco é $\frac{2}{3}$ da altura dessa pirâmide;
- a base menor do tronco tem $1\ \mathrm{m}$ de lado.

4.1. Determine o volume da estrutura na qual está assente a estátua.

Apresente o resultado em metros cúbicos, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

4.2. Na Figura 4, está representada, em referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, a pirâmide $[EFGHV]$. Como a figura ilustra, a origem do referencial é o centro da base desta pirâmide, e os eixos Ox e Oy contêm as diagonais dessa base.

A unidade do referencial é o metro.

Determine as coordenadas do ponto F.

Apresente o valor da ordenada de F arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, uma casa decimal.

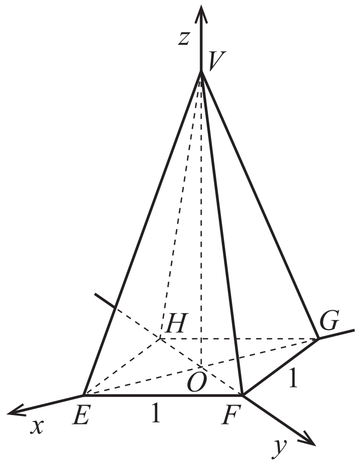

Figura 4

5. Em muitas serras portuguesas, existem parques eólicos, nos quais estão instalados aerogeradores para produção de energia elétrica. Cada aerogerador é constituído, entre outros elementos, por uma torre e por um rotor de três pás. Existem aerogeradores deste tipo com diferentes dimensões.

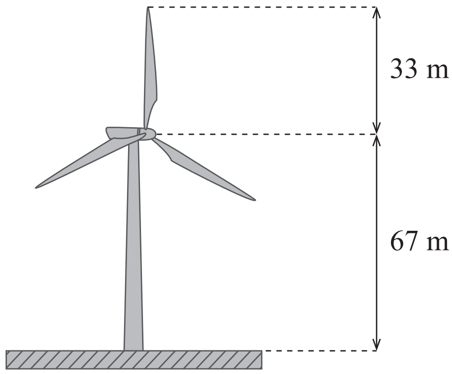

Figura 5

5.1. A Figura 5 é um esquema de um aerogerador do Parque Eólico de Bigorne.

Este aerogerador tem um rotor de três pás, cada uma com 33 metros de comprimento, e uma torre com 67 metros de altura.

5.1.1. O esquema da Figura 6 é relativo ao movimento circular do rotor.

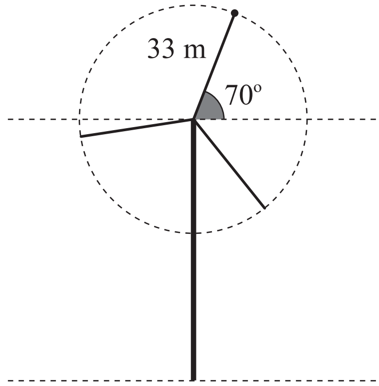

Figura 6

Num determinado instante do movimento do rotor, uma das pás faz um ângulo de 70^{o} com a horizontal, como sugere a figura.

Determine a distância da extremidade dessa pá ao solo naquele instante.

Apresente o valor pedido em metros, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

5.1.2. O valor da velocidade linear, v , em **metros por segundo**, de um ponto que descreve um movimento circular uniforme é dada por

$$v = \omega \times r$$

em que:

- ω é a amplitude, em **radianos**, do arco de circunferência descrito pelo ponto durante 1 segundo do movimento circular;
- r é o raio, em metros, do arco de circunferência descrito nesse movimento circular.

Admita que o rotor roda a uma velocidade linear de valor constante e dá 15 voltas por minuto.

Determine o valor da velocidade linear a que se desloca o ponto extremidade de uma das pás.

Apresente o resultado em **quilómetros por hora**, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

Na sua resposta, comece por obter o número de radianos correspondente a 15 voltas.

5.2. Um aerogerador do Parque Eólico de Vila Lobos, em Lamego, tem uma torre com 91 metros de altura.

Durante o movimento do rotor, a distância, h, em metros, da extremidade de uma pá ao solo, em função da amplitude, θ, em radianos, do ângulo orientado que essa pá faz com a horizontal, durante uma volta, é dada por

$$h(\theta) = 91 + 57\,\mathrm{sen}(\theta) \quad , \text{ com } \theta \in [0, 2\pi]$$

A situação está representada na Figura 7.

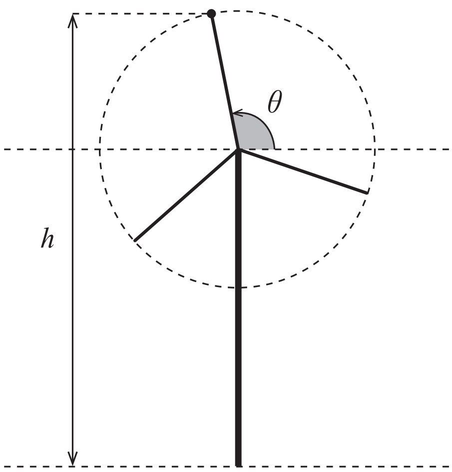

Figura 7

Determine o diâmetro, em metros, da circunferência descrita pela extremidade de uma pá numa volta.

5.3. A potência útil gerada por um aerogerador instalado num determinado local depende da velocidade do vento que faz girar o rotor, para determinados valores dessa velocidade.

Admita que, para dois modelos de aerogeradores, A e B, instalados num mesmo local, a potência, em quilowatts, em função do valor da velocidade do vento, v, em metros por segundo, é dada, respetivamente, por

$$P_A(v) = 1{,}525\, v^3 \quad , \text{ com } 5 \le v \le 14$$

e por

$$P_B(v) = 1{,}882\, v^3 \quad , \text{ com } 5 \le v \le 14$$

Existe algum valor da velocidade do vento para o qual a potência útil gerada por estes aerogeradores seja igual, de acordo com os modelos apresentados?

Justifique a sua resposta.

6. A Joana foi para a Serra da Estrela, onde vivem os avós, com o objetivo de consolidar o treino para uma competição regional de ginástica rítmica, nas especialidades de Bola e de Fita.

Admita que, nesta competição, o desempenho na prova de cada especialidade será classificado de 0 a 20 pontos.

A Joana planeou treinar durante 6 dias, irá dispor, em cada dia, de 9 horas para se dedicar ao treino e pretende obter, em cada uma das provas, 10 ou mais pontos.

Pela experiência da sua treinadora, a Joana admite que, por cada hora de treino para a prova de Bola, obterá $0{,}8$ pontos na respetiva prova e que, por cada hora de treino para a prova de Fita, obterá $0{,}5$ pontos na respetiva prova.

6.1. Nas condições referidas, é possível a Joana obter 20 pontos em cada uma das provas?

Justifique a sua resposta.

6.2. Quantas horas a Joana deverá treinar para a prova de Bola e quantas horas a Joana deverá treinar para a prova de Fita, durante os 6 dias, de modo que, nas condições referidas, seja máxima a soma dos pontos obtidos nas classificações das respetivas provas?

Na sua resposta, designe por x o número total de horas que a Joana deve treinar para a prova de Bola, e designe por y o número total de horas que a Joana deve treinar para a prova de Fita, durante os 6 dias, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 2 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td colspan="6">4.1.</td><td colspan="6">4.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="6">20</td><td colspan="6">18</td><td>38</td></tr>
<tr><td>Destes 12 itens contribuem para a classificação final da prova os 9 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td>1.1.</td><td>1.2.</td><td>2.1.1.</td><td>2.1.2.</td><td>2.2.</td><td>3.</td><td>5.1.1.</td><td>5.1.2.</td><td>5.2.</td><td>5.3.</td><td>6.1.</td><td>6.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">9 x 18 pontos</td><td>162</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>