

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais
Prova 835 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

13 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

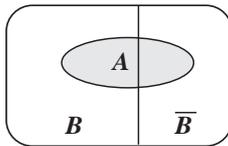
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

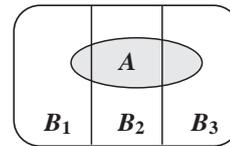
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B) + P(A \cap \bar{B}) = \\ &= P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})\end{aligned}$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A | B)}{P(B) \times P(A | B) + P(\bar{B}) \times P(A | \bar{B})}$$



$$\begin{aligned}P(A) &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) = \\ &= P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)\end{aligned}$$

$$P(B_k | A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A | B_k)}{P(B_1) \times P(A | B_1) + P(B_2) \times P(A | B_2) + P(B_3) \times P(A | B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X , admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left] \bar{x} - z \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 σ – desvio padrão da variável
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X , admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \bar{x} - z \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z \frac{s}{\sqrt{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \bar{x} – média amostral
 s – desvio padrão amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p , admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left] \hat{p} - z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right[$$

n – dimensão da amostra
 \hat{p} – proporção amostral
 z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. A ParaPagarApp é uma aplicação para telemóveis detida pela empresa ParaPagar. Depois de instalada, esta aplicação permite efetuar pagamentos em estabelecimentos aderentes recorrendo à Internet móvel.

Em 2020, foi necessário eleger uma nova equipa diretiva da ParaPagar. Nessa eleição, cada acionista da empresa teve de votar numa de quatro listas que se apresentaram a votação: listas A, B, C e D.

Apurados os resultados, verificou-se que o número de votos validamente expressos foi 7200.

* 1.1. Os votos validamente expressos representaram 96% dos votos apurados e a abstenção foi de 20%. Qual é o número de acionistas da empresa que poderiam ter votado no momento deste ato eleitoral?

(A) 7500

(B) 9000

(C) 9375

(D) 37 500

1.2. Na Tabela 1, apresenta-se o número de votos validamente expressos em cada uma das listas.

Tabela 1

Lista	A	B	C	D
Votos	1505	2295	1750	1650

A nova equipa diretiva, constituída por 24 elementos, resultou da aplicação do método seguinte.

1.º passo: Calcula-se o divisor padrão, dividindo-se o número total de votos validamente expressos pelo número de elementos da equipa diretiva.

2.º passo: Calcula-se a quota inferior de cada lista, arredondando, por defeito, às unidades o resultado da divisão entre o número de votos de cada lista e o divisor padrão.

3.º passo: Se a soma das quotas inferiores das quatro listas for igual ao número de elementos da equipa diretiva, o método dá-se por finalizado e assume-se que o número de elementos de cada lista é igual ao valor da quota inferior. Caso contrário, é necessário encontrar um divisor modificado.

- Se a soma das quotas inferiores for inferior ao número de elementos da equipa diretiva, subtrai-se um múltiplo de 10 ao divisor padrão.
- Se a soma das quotas inferiores for superior ao número de elementos da equipa diretiva, soma-se um múltiplo de 10 ao divisor padrão.

O divisor modificado irá substituir o divisor padrão, de modo a calcular a quota inferior modificada de cada lista.

4.º passo: Repetem-se os 2.º e 3.º passos até se obter uma soma das quotas inferiores modificadas que seja igual ao número de elementos da equipa diretiva, atribuindo-se a cada lista o número de elementos igual à respetiva quota inferior modificada.

Determine o número de elementos que cada lista conseguiu eleger para a nova equipa diretiva da ParaPagar, recorrendo ao método descrito.

* 2. Para distinguir os três trabalhadores com melhores resultados operacionais, a administração da ParaPagar atribuiu como prémio de produtividade três telemóveis de modelos diferentes.

Como os três trabalhadores não chegaram a acordo quanto à distribuição dos telemóveis, decidiram que iriam distribuí-los entre si utilizando o método seguinte.

- Cada trabalhador atribui, secretamente, um valor monetário a cada um dos três telemóveis e introduz o registo dessas licitações num envelope fechado. Em seguida, os envelopes são abertos e os valores das licitações são registados numa tabela.
- Determina-se o valor global atribuído aos telemóveis por cada trabalhador e o valor que cada um considera justo receber. Assume-se que o valor que cada trabalhador considera justo receber é igual a um terço do valor global que ele atribuiu ao conjunto dos três telemóveis.
- Cada telemóvel é entregue ao trabalhador que mais o valoriza, considerando-se que o trabalhador recebe o valor monetário que lhe atribuiu.
- Caso, por aplicação do procedimento anterior, um trabalhador não receba qualquer telemóvel, considera-se, para efeito dos cálculos seguintes, que o valor monetário recebido por esse trabalhador é zero euros.
- Caso o valor dos telemóveis recebidos por um trabalhador ultrapasse o valor que tinha considerado justo receber, o trabalhador disponibiliza, em dinheiro, o respetivo excedente. Caso contrário, o trabalhador recebe, em dinheiro, do montante à disposição, o valor em falta.
- Após os procedimentos anteriores, caso ainda reste dinheiro, este é distribuído em partes iguais pelos três trabalhadores.

Na Tabela 2, estão registados os valores, em euros, atribuídos por cada trabalhador nas licitações secretas.

Tabela 2

Telemóveis	A	B	C
Trabalhadores			
Mariana	370	480	230
Pedro	330	500	205
Tiago	290	480	190

Determine, de acordo com o método acima descrito, como serão distribuídos os telemóveis pelos trabalhadores e o valor monetário a pagar ou a receber após a inclusão do dinheiro que possa ter sido distribuído, para que nenhum deles tenha razão para reclamar.

3. A ParaPagar pretende renovar a rede de cabo de fibra ótica em algumas das ligações existentes entre seis postos de comunicação, $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$ e $P6$.

Na Figura 1, apresenta-se um esquema simplificado dessas ligações, no qual se indica, junto de cada segmento de reta, o comprimento, em quilómetros, de cada ligação.

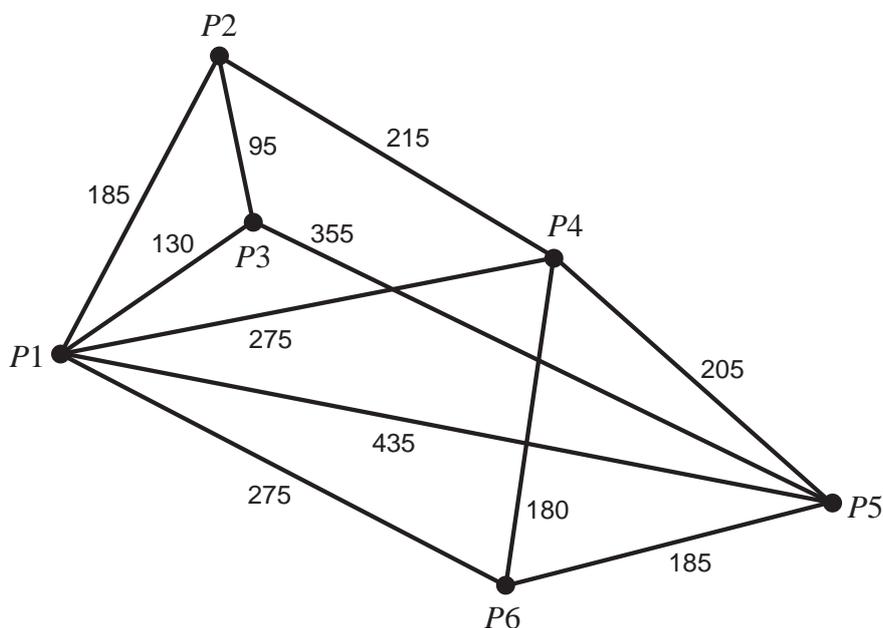


Figura 1

Com vista à minimização de custos, optou-se por começar a renovação no posto de comunicação $P4$ e aplicar o método que a seguir se descreve.

- Seleciona-se o posto seguinte, tendo em conta que:
 - deverá corresponder ao posto mais próximo;
 - se houver dois postos à mesma distância, a seleção é aleatória.
- Proceda-se como foi indicado no ponto anterior, partindo do último posto selecionado, não se repetindo nenhum e terminando depois de todos os postos serem incluídos.

Determine a quantidade mínima, em quilómetros, de cabo de fibra ótica a renovar.

Na sua resposta, apresente um grafo que resulte do método descrito e que permita identificar as ligações a renovar.

4. A ParaPagar tem 150 funcionários na região de Lisboa e Vale do Tejo cujas idades se apresentam no histograma de frequências absolutas acumuladas, representado na Figura 2, organizadas nas classes $[18, 28[$, $[28, 38[$, ... , $[58, 68[$.

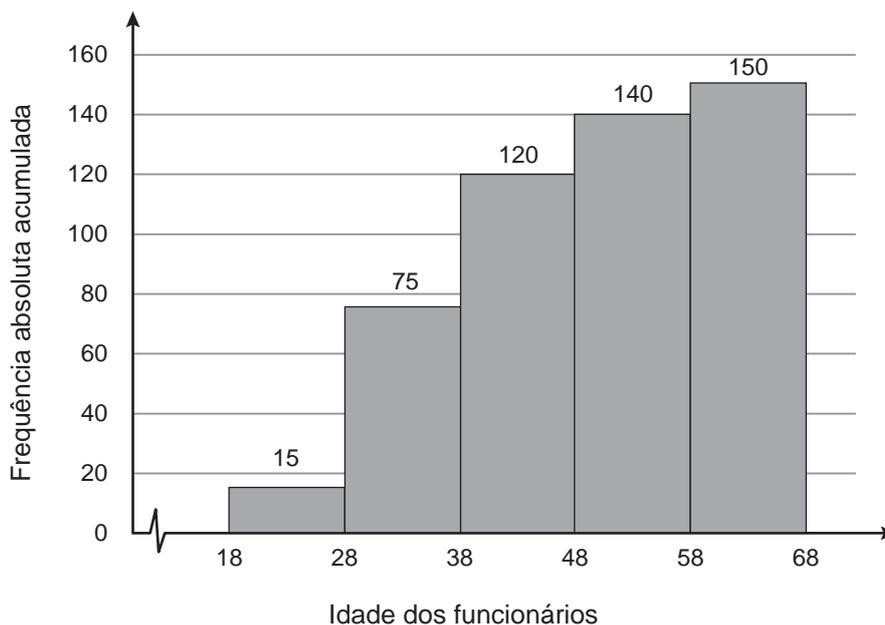


Figura 2

- 4.1. Determine, recorrendo ao histograma da Figura 2, a média das idades dos 150 funcionários.

Apresente o resultado com arredondamento às unidades.

- * 4.2. Considere que, com os dados apresentados no histograma da Figura 2, será construído um gráfico circular, em que a cada sector corresponde o número de funcionários da região de Lisboa e Vale do Tejo, de acordo com as suas idades.

A amplitude do ângulo ao centro, em graus, correspondente ao sector circular relativo ao número de funcionários cuja idade pertence à classe $[18, 28[$ será

- (A) 15° (B) 18° (C) 33° (D) 36°

- 4.3. Na Tabela 3, apresentam-se, organizadas por classes, as idades dos 100 funcionários da ParaPagar da região do Algarve.

Tabela 3

Idade	$[18, 28[$	$[28, 38[$	$[38, 48[$	$[48, 58[$	$[58, 68[$
N.º de funcionários	30	25	30	10	5

Apresente uma tabela de frequências relativas acumuladas para as idades dos 250 funcionários da ParaPagar, 150 da região de Lisboa e Vale do Tejo e 100 da região do Algarve.

Na sua resposta, mantenha as classes utilizadas.

- * 5. Ao fazer pagamentos recorrendo à ParaPagarApp, o utilizador pode optar por fracionar o pagamento de 2 até 12 prestações mensais.

O valor da prestação mensal P , em euros, é dado pelo arredondamento às unidades do valor obtido pela expressão

$$P = \frac{VF \times i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

em que

VF é o valor financiado, em euros;

i é a taxa de juro mensal, na forma de dízima;

n é o número de prestações mensais.

Para comprar um telemóvel, o Tiago solicitou um financiamento de 500 euros e decidiu pagá-lo de forma fracionada, recorrendo à ParaPagarApp.

Admita que a taxa de juro mensal é 3% e que o Tiago pode pagar, no máximo, 75 euros em cada prestação mensal.

Uma vez que, quanto maior for o número de prestações mensais, maior é o valor total final a pagar, o Tiago fez cálculos para decidir em quantas prestações mensais faria o pagamento, de modo a ser mais vantajoso.

Determine o valor total pago pelo Tiago, depois de pagar todas as prestações.

Na sua resposta, apresente:

- a expressão de P no contexto da situação descrita;
- uma tabela que permita obter o solicitado;
- o número de prestações mensais pagas pelo Tiago.

6. Admita que, no início do ano de 2016, a ParaPagarApp tinha, em Portugal continental, 50 000 utilizadores.

O número de utilizadores, em milhares, que, t anos após o início do ano de 2016, na região do Alentejo, utiliza a ParaPagarApp é bem aproximado pelo modelo

$$A(t) = \frac{20}{1 + e^{-0,2t}}$$

* 6.1. Determine a percentagem de utilizadores da aplicação ParaPagarApp em Portugal continental que não pertenciam à região do Alentejo no início do ano de 2016.

6.2. Numa perspetiva de longo prazo, estima-se que, com o passar dos anos, o número de utilizadores da ParaPagarApp, em Portugal continental, seja 200 000.

Na Figura 3, apresenta-se um mapa de Portugal continental e, parcialmente, a estimativa da percentagem de utilizadores da ParaPagarApp, por regiões, numa perspetiva de longo prazo.

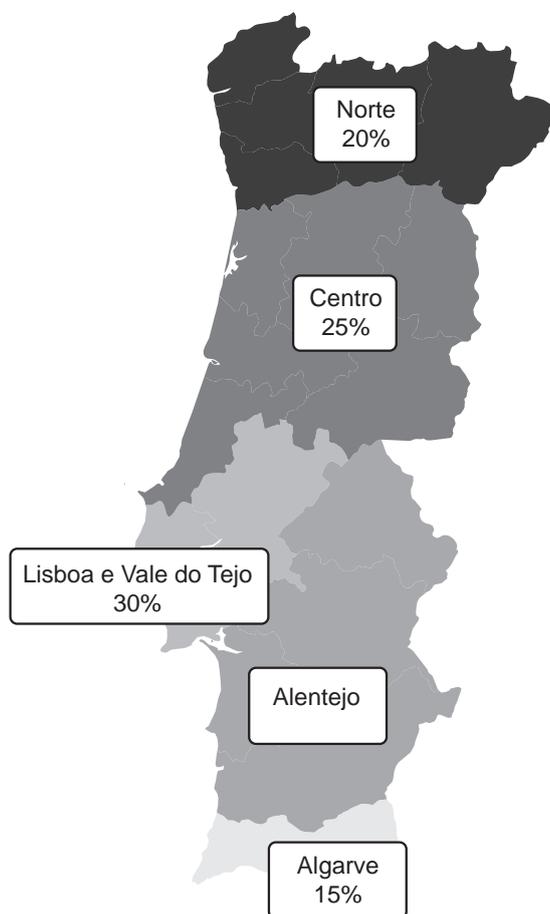


Figura 3

Atendendo aos dados apresentados na Figura 3, averigue se o modelo apresentado para o Alentejo poderá estar correto para uma estimativa a longo prazo de utilizadores da aplicação em Portugal continental. Justifique a sua resposta.

* 7. A ParaPagarApp foi lançada no início do ano de 2015.

Num relatório técnico, verifica-se que a percentagem, D , de novos utilizadores que tiveram dificuldades na instalação da aplicação, t anos após o seu lançamento, é bem aproximada pelo modelo cujo gráfico se apresenta na Figura 4.

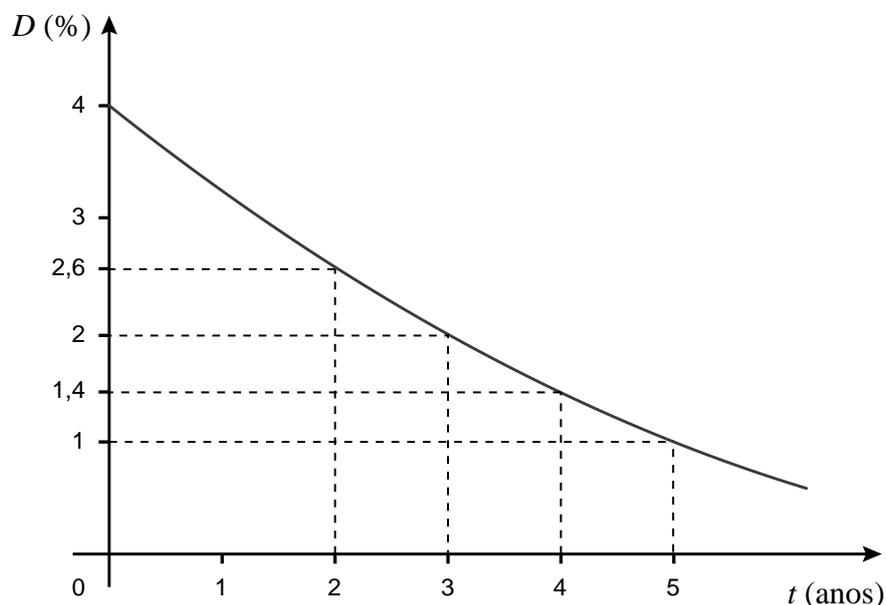


Figura 4

Realizou-se um estudo sobre os novos utilizadores da ParaPagarApp no início do ano de 2018 e concluiu-se que:

- 40% dos novos utilizadores que tiveram dificuldades na instalação da aplicação consideram a aplicação de fácil manuseamento;
- 90% dos novos utilizadores que não tiveram dificuldades na instalação da aplicação consideram a aplicação de fácil manuseamento.

Escolheu-se ao acaso um novo utilizador da ParaPagarApp que instalou a aplicação no início do ano de 2018.

Com base no estudo realizado e de acordo com o modelo apresentado na Figura 4, determine a probabilidade de o novo utilizador não considerar a aplicação de fácil manuseamento.

Apresente o resultado na forma de dízima.

- * 8. Por razões de segurança, sempre que se pretende efetuar um pagamento com a ParaPagarApp, é necessário escrever uma palavra-passe anteriormente escolhida pelo utilizador.

O Tiago é um utilizador da ParaPagarApp. Tendo nascido no dia 8 de maio (mês 5) de 2001, escolheu as letras T e G e os algarismos 8, 5 e 1 para a construção da sua palavra-passe.

Certo dia, o Tiago não se recordava exatamente de qual seria a palavra-passe que escolhera, embora soubesse que:

- os algarismos estavam dispostos consecutivamente, formando o número 851;
- as letras utilizadas eram T e G, escritas por uma qualquer ordem.

Atendendo ao que sabia, o Tiago escreveu uma possível palavra-passe.

A probabilidade de o Tiago acertar na palavra-passe correta à primeira tentativa é igual a

- (A) $\frac{1}{6}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{2}{3}$

- * 9. Por vezes, por esquecimento da palavra-passe ou por erros ocasionais na sua escrita, um utilizador escreve a palavra-passe incorretamente.

Admita que, em 10% das situações, os utilizadores cometem erros na escrita da palavra-passe.

Determine a probabilidade de, selecionando três utilizadores ao acaso, apenas um deles não cometer erros na escrita da palavra-passe.

Apresente o resultado na forma de dízima.

- * 10. Inquiriram-se 625 utilizadores da ParaPagarApp relativamente ao valor pago na última compra em que usaram a aplicação.

Na Tabela 4, apresentam-se os dados recolhidos.

Tabela 4

Valor pago, em euros]0, 20]]20, 40]]40, 60]]60, 80]]80, 100]
N.º de utilizadores	308	81	44	128	64

Recorrendo aos dados da tabela anterior, construa um intervalo de confiança a 90% para a proporção de utilizadores da ParaPagarApp que, na última compra, usaram a aplicação, pagaram mais de 20 euros e, no máximo, pagaram 60 euros.

Apresente os valores dos extremos do intervalo arredondados às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve seis casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.1.	2.	4.2.	5.	6.1.	7.	8.	9.	10.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	20	12	18	18	18	12	18	18	146
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	1.2.	3.	4.1.	4.3.	6.2.	Subtotal				
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos									54
TOTAL										200

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

1.^a Fase