REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 7 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 7 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: *Área da base* $\times$ *Altura*

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

1. O consumo energético das famílias portuguesas, proveniente de gás natural, tem aumentado nas últimas décadas.

Admita que, durante duas décadas, o consumo energético anual, G, em gás natural das famílias portuguesas, em terajoule (TJ), por ano, é dado por

$$G(t) = \frac{10\,765{,}05}{1 + 11{,}81\, e^{-0{,}49t}}$$

em que $t = 0$ corresponde a 1997, $t = 1$ corresponde a 1998, e assim sucessivamente.

* **1.1.** Determine o valor do consumo energético em gás natural das famílias portuguesas no ano de 2017, de acordo com o modelo apresentado.

Apresente o resultado em TJ, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, seis casas decimais.

1.2. De acordo com o modelo apresentado, a partir de que ano o valor do consumo energético em gás natural, em TJ, por ano, passou a ser superior a 9000 ?

Justifique a sua resposta.

2. O António pretende mudar de empresa distribuidora de gás natural. Para esse efeito, está a fazer um estudo e selecionou duas empresas: A e B.

A empresa A apresenta o seguinte tarifário:

- parcela fixa: $0{,}1336$ euros por dia;
- parcela variável em função da energia consumida: $0{,}0479$ euros por kWh.

A empresa B apresenta o seguinte tarifário:

- parcela fixa: isento $(0$ euros por dia$)$;
- parcela variável em função da energia consumida: $0{,}0586$ euros por kWh.

2.1. O António analisou uma fatura de gás referente a 30 dias e verificou que o consumo energético foi $325\ \mathrm{kWh}$.

De acordo com os tarifários apresentados, em qual das empresas, A ou B, teria sido menor o valor a pagar pelo consumo energético em gás natural indicado na fatura?

Justifique a sua resposta.

* **2.2.** O António verificou que, a partir de um certo valor de consumo energético em gás natural, em kWh, por mês, lhe seria mais favorável optar pela empresa A.

Determine esse valor.

Apresente o resultado em kWh, arredondado às unidades.

Na sua resposta, considere um mês de 30 dias. Comece por apresentar expressões das funções, f e g, que relacionam o preço a pagar por mês com o consumo energético em gás natural, x, em kWh, nas empresas A e B, respetivamente.

3. No quintal que tem junto à sua casa, na zona de Leça da Palmeira, o António vai cultivar cogumelos e espargos para vender no mercado municipal de Matosinhos.

O António admite que o lucro que obterá por cada quilograma de cogumelos que cultivar é 3 euros e que o lucro que obterá por cada quilograma de espargos que cultivar é 4 euros.

Dadas as características do terreno, o cultivo destes dois produtos obedece às seguintes condições:

- a quantidade a cultivar de cada um dos produtos não pode exceder o dobro da quantidade a cultivar do outro produto;
- a quantidade total a cultivar destes dois produtos não pode exceder 9 quilogramas.

Determine a quantidade a cultivar de cada um dos produtos, de modo que, de acordo com as condições, o lucro total obtido com o cultivo dos mesmos seja máximo.

Na sua resposta, designe por x a quantidade, em quilogramas, de cogumelos a cultivar e designe por y a quantidade, em quilogramas, de espargos a cultivar, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

4. O António, quando se desloca ao mercado municipal de Matosinhos para vender os seus produtos agrícolas, utiliza a ponte móvel entre Leça da Palmeira e Matosinhos, no porto de Leixões. A Figura 1 é uma fotografia dessa ponte.

A ponte tem dois tabuleiros, geometricamente iguais, com apoios nas margens do rio Leça, que se movem, permitindo a passagem de barcos.

A Figura 2, que não está à escala, esquematiza a situação.

Figura 1

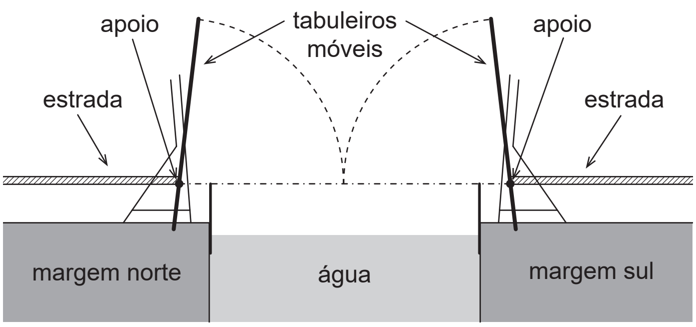

Figura 2

Considere o tabuleiro móvel situado na margem norte, representado por $[RP]$ na Figura 3.

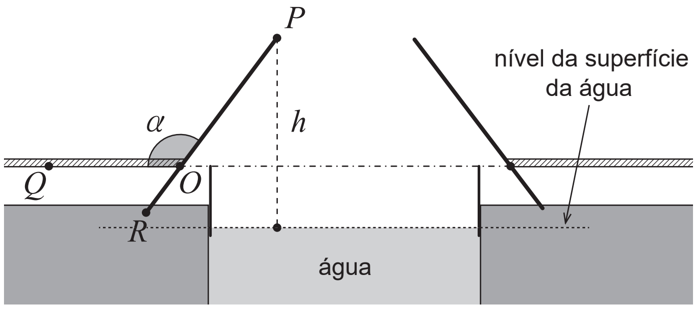

Figura 3

Nesta figura, que não está à escala:

- o ponto Q situa-se na estrada de acesso à ponte, na margem norte;
- o ponto O é o ponto que pertence à estrada e ao tabuleiro móvel, e representa um dos apoios;
- os pontos P e R acompanham o movimento do tabuleiro, enquanto o ponto O se mantém fixo.

Seja α a amplitude, em graus, do ângulo QOP .

Admita que, para cada valor de α , a altura, h , em metros, do ponto P em relação ao nível da superfície da água, considerando o nível médio do mar, é dada por

$$h(\alpha) = 46 \operatorname{sen}(\alpha) + 10{,}7 \quad , \quad \text{com} \quad 90^{\circ} \leq \alpha \leq 180^{\circ}$$

O argumento da função seno está em graus.

4.1. Determine o valor de α para o qual a altura do ponto P em relação ao nível da superfície da água é igual a 25 metros.

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

*** 4.2.** O vão desta ponte é a distância entre os dois apoios, representada por v no esquema da Figura 4, que não está à escala.

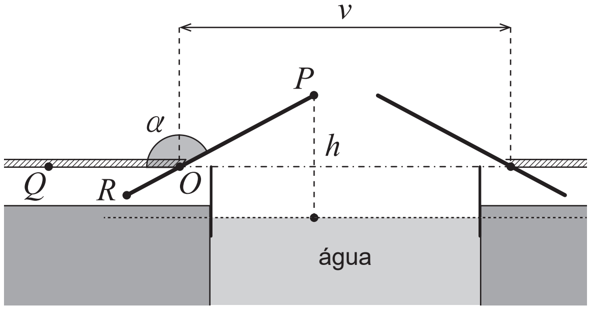

Figura 4

Determine o vão da ponte.

4.3. Seja T a função que dá a taxa de variação instantânea da função h , para cada valor de α .

Determine o valor de $T(135)$, arredondado às centésimas, e interprete-o no contexto da situação.

5. Nas noites quentes de verão, o António gosta de se sentar no pátio da sua casa a escutar o som dos grilos.

O som que os grilos produzem é originado por movimentos das asas, designados pulsos. O número de pulsos tende a aumentar com a subida da temperatura ambiente.

5.1. A Figura 5 é um diagrama de dispersão, no qual se relaciona o número de pulsos por segundo, y, com a temperatura ambiente, x, em graus Celsius (^{o}C). Este diagrama foi elaborado a partir de dados registados numa experiência com um grilo da espécie *Orocharis saltator*. Existe uma correlação linear forte entre as variáveis relacionadas. Nesta figura, está também representada a reta r, reta de regressão linear de y sobre x, e são indicadas as coordenadas dos pontos do diagrama de dispersão.

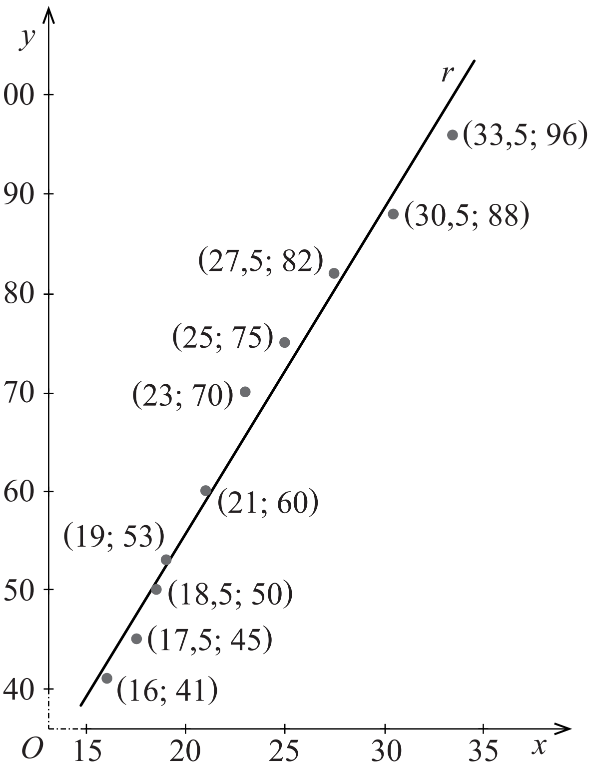

Figura 5

Estime, a partir da equação da reta r, o número de pulsos por segundo feitos pelo grilo quando a temperatura ambiente é igual a $22\ ^{o}C$.

Na sua resposta:

– apresente os valores dos parâmetros da equação da reta r arredondados às centésimas;

– apresente o valor pedido arredondado às unidades.

5.2. Admita que, para a espécie de grilos *Nemobius fasciatus*, a sequência que dá, aproximadamente, o número de pulsos por segundo para cada valor da temperatura ambiente, n, em graus Celsius, é definida por

$$u_n = 6n - 48 \quad , \quad \text{com} \quad n \in \{15, 16, ..., 38\}$$

* **5.2.1.** Justifique que os termos da sequência (u_n) são termos consecutivos de uma progressão aritmética.

5.2.2. No âmbito de uma experiência, fizeram-se, durante alguns dias, duas audições por noite de um grilo da espécie *Nemobius fasciatus*, cada uma com a duração de um segundo. As temperaturas registadas em cada audição apresentam-se na tabela seguinte.

Dia	1.ª audição	2.ª audição
segunda-feira	21 ºC	20 ºC
terça-feira	23 ºC	22 ºC
quarta-feira	25 ºC	24 ºC
quinta-feira	27 ºC	26 ºC
sexta-feira	29 ºC	28 ºC

Determine o número total de pulsos do grilo ocorridos no conjunto das dez audições, de acordo com o modelo apresentado.

6. O António guarda, como recordação, uma bola de vidro, esférica e maciça, dentro de uma caixa cúbica. A bola é tangente à superfície interior de todas as faces da caixa.

A Figura 6 mostra, em referencial ortogonal e monométrico, $Oxyz$, um esquema da bola dentro da caixa. Neste esquema, que não está à escala, a bola está representada por uma esfera e a caixa pelo cubo $[ABCDEFGH]$.

Sabe-se que:

- a esfera está inscrita no cubo;
- a origem do referencial coincide com o centro do cubo;
- os eixos Ox, Oy e Oz intersectam as faces do cubo nos centros das mesmas;
- o vértice D tem coordenadas $(-10, -10, 10)$.

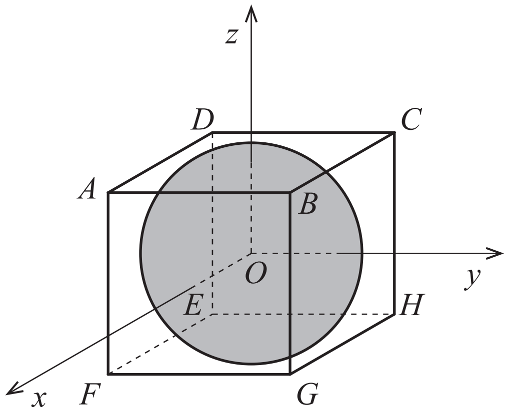

Figura 6

A unidade do referencial é o centímetro.

Devido à fragilidade do vidro, o António preencheu todo o espaço vazio da caixa com um material de amortecimento.

Determine o volume que o material de amortecimento ocupa no interior da caixa cúbica onde o António guarda a bola, considerando desprezável a espessura da caixa.

Apresente o resultado em centímetros cúbicos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

* **7.** A fotografia da Figura 7 mostra um vaso, suspenso por cordas, que o António tem no pátio.

O vaso tem 12 cm de altura e a sua forma, considerando desprezável a sua espessura, é de parte de uma superfície esférica de raio $7{,}5 \text{ cm}$.

Na Figura 8, está representado um esquema do vaso e da superfície esférica.

Figura 7

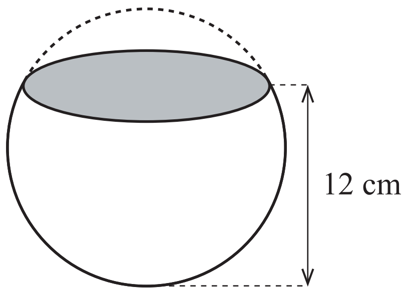

Figura 8

Determine o perímetro da abertura circular do vaso, representada a sombreado na Figura 8.

Apresente o resultado em centímetros, arredondado às décimas.

*** 8.** O António comprou duas mil batatas-sementes para semear num terreno que tem junto à sua casa.

Seja X a variável aleatória «massa, em gramas, de uma batata-semente tirada ao acaso dessas duas mil batatas-sementes».

Admita que X segue uma distribuição normal de valor médio 65 gramas e que $P(50 < X < 80) = 70\%$.

A tabela seguinte relaciona a massa, em gramas, de uma batata-semente com a massa, em quilogramas, do total das batatas produzidas a partir dessa batata-semente.

Massa da batata-semente (g)	Menor do que 50	Entre 50 e 80	Maior do que 80
Massa das batatas produzidas (kg)	$0{,}8$	m	$1{,}5$

Na tabela, m representa um número real positivo.

Com a sementeira das duas mil batatas-sementes, estima-se uma produção de $2230\ \mathrm{kg}$ de batatas.

Determine o valor de m .

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 7 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.2.**	**5.2.1.**	**7.**	**8.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16	16	20	20	16	16	16	**120**
Destes 7 itens contribuem para a classificação final da prova os 5 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.2.**	**2.1.**	**4.1.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.2.**	**6.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	5 x 16 pontos							**80**
TOTAL								**200**