REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2021

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 13 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados na sua utilização, como:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas relevantes da tabela obtida para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

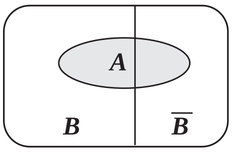
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

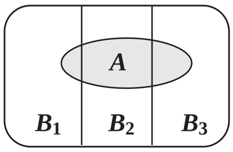
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

(*) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

1. O Erasmus+ é o programa europeu que apoia a educação, a formação, a juventude e o desporto e que facilita a mobilidade académica de estudantes europeus através do mundo inteiro.

Numa universidade, realizou-se um estudo com o objetivo de aferir qual seria a cidade preferida, de entre Barcelona (B), Cracóvia (C), Praga (P) e Roma (R), para fazer Erasmus+.

Foram selecionados alguns estudantes que preencheram um boletim, no qual ordenaram as quatro cidades, de acordo com as suas preferências. Cada boletim preenchido, com uma determinada ordenação, correspondia a 1 voto.

Na Tabela 1, encontram-se parcialmente organizados os resultados da votação, em que X representa o número de votos na lista de preferências que apresentava Cracóvia como primeira preferência, Barcelona como segunda, Roma como terceira e Praga como quarta.

Tabela 1

N.º de votos / Preferências	**36**	**58**	X	**29**
1.ª	B	P	C	C
2.ª	P	R	B	P
3.ª	C	B	R	B
4.ª	R	C	P	R

Concluída a votação, o apuramento da cidade vencedora resultou do método a seguir descrito.

- Seleciona-se um par de cidades e atribui-se o número de votos registados em cada coluna à cidade mais bem posicionada, de entre as duas selecionadas.
- Comparam-se os votos obtidos por essas duas cidades. A cidade com o maior número de votos é a vencedora do par escolhido.
- Repetem-se os procedimentos anteriores até uma das cidades ter vencido em todas as comparações com as restantes. Essa cidade é a vencedora.

Verificou-se que Barcelona (B), tendo vencido em todas as comparações, foi a cidade vencedora depois de aplicado o método descrito aos votos apresentados na Tabela 1.

Indique o valor mínimo e o valor máximo que X pode representar.

Na sua resposta, apresente todos os cálculos que efetuar.

2. Na universidade, realiza-se anualmente um congresso para o qual são convidados 10 alunos que divulgam o programa Erasmus+.

Em 2019, os convites foram distribuídos entre os quatro grupos de alunos que fizeram Erasmus+ nas cidades de Barcelona (grupo B), Cracóvia (grupo C), Praga (grupo P) e Roma (grupo R).

Para definir o número de convites a atribuir a cada grupo de alunos, foi considerado o número de alunos de cada grupo e foi aplicado o método que a seguir se descreve.

- Divide-se o número de alunos de cada grupo sucessivamente por 1, 2, 3, 4, 5, etc.
- Ordenam-se todos os quocientes obtidos, arredondados às décimas, pela ordem decrescente da sua grandeza, numa série de tantos termos quantos os convites a atribuir. Caso existam quocientes iguais, o quociente do grupo com menor número de alunos deverá ficar primeiro do que o outro.
- Atribuem-se os convites ao grupo a que correspondem os termos da série estabelecida pela regra anterior, recebendo cada um dos grupos tantos convites quantos os seus termos na série.

Na Tabela 2, indica-se a distribuição, por cada grupo, dos 2500 alunos que fizeram Erasmus+, em 2019, nas cidades indicadas.

Tabela 2

Grupo	**B**	**C**	**P**	**R**
Número de alunos	430	1020	850	200

Depois de conhecidos os resultados, um dos organizadores do congresso afirmou que a distribuição do número de convites seria diferente se estes tivessem sido atribuídos na proporção direta do número de alunos de cada grupo, com arredondamento às unidades.

Aplicando este método, ao grupo B, por exemplo, seriam atribuídos dois convites, uma vez que $\frac{430}{2500} \times 10 = 1{,}72$.

Mostre que a adoção do segundo método proposto seria vantajosa unicamente para o grupo R.

Na sua resposta, apresente o número de convites a atribuir a cada grupo, utilizando cada um dos dois métodos apresentados.

*** 3.** Na Figura 1, apresenta-se um esquema de um anfiteatro, de forma aproximadamente circular, cujo palco, também circular, está inserido no centro da plateia. O anfiteatro está dividido em duas partes iguais, a metade Oeste, representada a cinzento, e a metade Este, representada a branco.

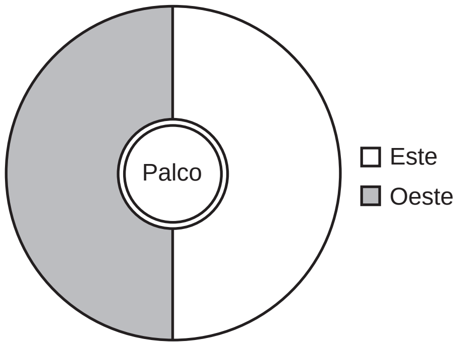


Figura 1

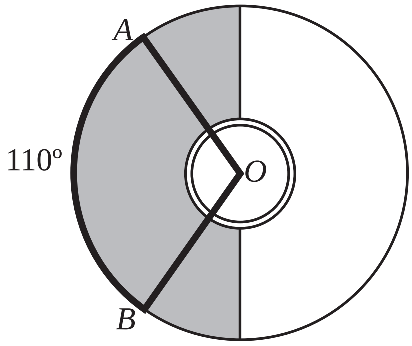
Neste anfiteatro, decorreu um espetáculo com a lotação esgotada.

Admita que os bilhetes dos lugares da metade Oeste do anfiteatro foram vendidos a um quarto do valor dos bilhetes da metade Este.

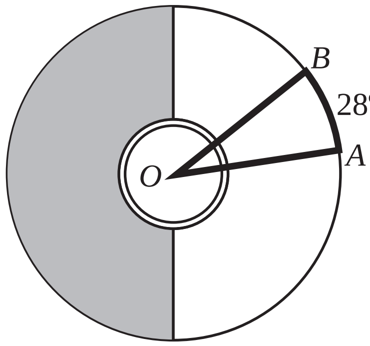
Em cada uma das opções seguintes, está realçado um sector circular AOB, que corresponde a uma parte do anfiteatro.

Em qual das opções está representado o sector circular AOB que permite obter maior receita de bilheteira?

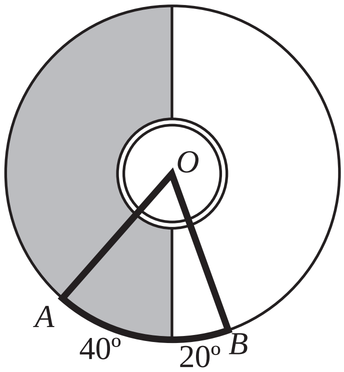
(A)



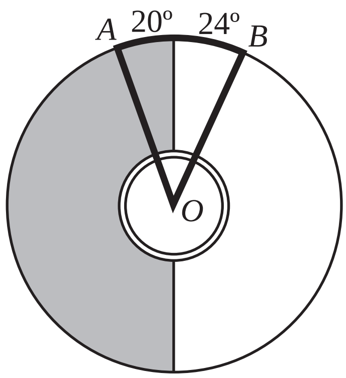
(B)



(C)



(D)



4. Num *campus* universitário, pretende-se instalar uma iluminação decorativa, constituída por um fio de luzes suspenso entre seis edifícios, E1, E2, E3, E4, E5 e E6.

A Tabela 3 apresenta o comprimento previsto, em metros, do fio de luzes que seria necessário instalar entre cada par de edifícios.

Tabela 3

	E1	E2	E3	E4	E5	E6
E1		1550	850	1420	1260	560
E2	1550		1000	320	340	1250
E3	850	1000		810	820	300
E4	1420	320	810		350	1050
E5	1260	340	820	350		1050
E6	560	1250	300	1050	1050	

De modo a minimizar o custo da instalação da iluminação decorativa, construiu-se um grafo que resulta do método que a seguir se descreve.

- Escolhe-se, ao acaso, um dos seis edifícios e, de seguida, de entre os restantes, seleciona-se aquele que, por se encontrar a uma menor distância do primeiro, implique um menor comprimento do fio de luzes previsto.
- Seleciona-se outro edifício que ainda não tenha sido escolhido e que, por se encontrar a uma menor distância dos edifícios anteriormente escolhidos, implique um menor comprimento do fio de luzes previsto.
- Repete-se o ponto anterior até todos os edifícios terem sido selecionados.

Admita que a instalação da iluminação decorativa terá um custo de 3,5 euros por cada metro de fio de luzes previsto.

Determine o custo total desta instalação.

Na sua resposta, apresente:

– um grafo ponderado que resulte da aplicação do método descrito;

– o comprimento mínimo previsto, em metros, do fio de luzes a instalar.

5. O número aproximado de alunos estrangeiros inscritos na faculdade $F1$, t anos após o início do ano de 2000, é dado, arredondando às unidades o valor obtido, pela expressão

$$E(t) = \frac{2500}{1 + 15e^{-0,27t}} \qquad (t = 0, 1, 2, \dots, 15)$$

Assim, por exemplo, o número aproximado de alunos estrangeiros inscritos nesta faculdade, dois anos após o início do ano de 2000, é 257, pois $E(2) = 256,64126\dots$

* **5.1.** Comparando o número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade $F1$ no início de 2004 com o número de alunos estrangeiros inscritos na faculdade $F1$ no início de 2007, concluiu-se que este triplicou.

Indique, justificando, se a afirmação é verdadeira.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

5.2. Na faculdade $F2$, o número aproximado de alunos estrangeiros inscritos, t anos após o início do ano de 2000, é dado, arredondando às unidades o valor obtido, pela expressão

$$N(t) = 200e^{0,16t} \qquad (t = 0, 1, 2, \dots, 15)$$

Durante quantos anos o número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade $F1$ foi superior ao número de alunos estrangeiros inscritos, no início de cada ano, na faculdade $F2$?

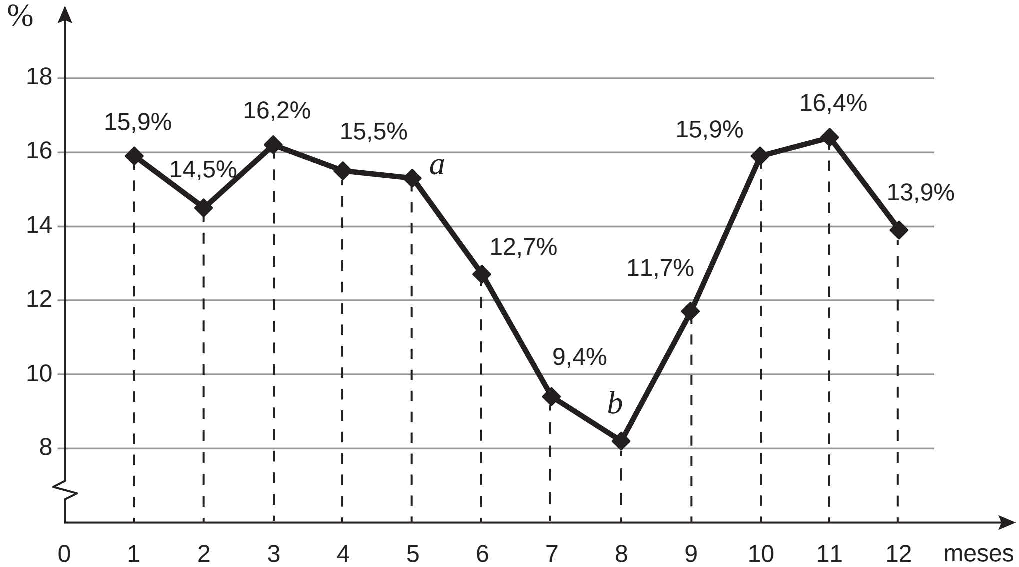
Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

6. No Gráfico 1, está parcialmente apresentada, em percentagem, a taxa de utilização da cantina pelos alunos inscritos numa universidade, em cada um dos meses do ano de 2019, em que a e b representam a taxa correspondente ao mês 5 e ao mês 8, respetivamente.

Gráfico 1



* **6.1.** No mês 6, frequentaram a cantina 1016 alunos.

No mês 7, o número de alunos que frequentaram a cantina diminuiu, aproximadamente, x % relativamente ao número de alunos que a frequentaram no mês anterior.

Qual é o valor de x, com arredondamento às unidades?

(A) 26 **(B)** 3 **(C)** 35 **(D)** 2

6.2. Admita que a mediana dos dados recolhidos, relativos à taxa de utilização da cantina ao longo dos meses do ano de 2019, é 14,9%.

Determine o valor de a.

*** 7.** O Francisco recorreu a um crédito no valor de 10 500 euros para adquirir um automóvel.

As condições oferecidas pela instituição bancária foram as seguintes:

- prazo contratado de 60 meses;
- prestação mensal, constante, no valor de 280 euros.

Uma parte do valor de cada uma das 60 prestações é utilizada no pagamento dos juros. Essa parte varia em função do número da prestação.

Admita que, nas primeiras 24 prestações, 60% do valor da prestação corresponde a juros e que, nas 24 prestações seguintes, 25% do valor da prestação corresponde a juros.

Depois de pagar 48 prestações, qual é o valor total de juros que o Francisco ainda tem de pagar até ao final do empréstimo?

*** 8.** Dos alunos de uma universidade que participaram no programa Erasmus+, sabe-se que:

- 40% dos que ficaram alojados numa residência universitária não ficaram colocados na primeira cidade que selecionaram;
- 18% ficaram colocados na primeira cidade que selecionaram e ficaram alojados numa residência universitária.

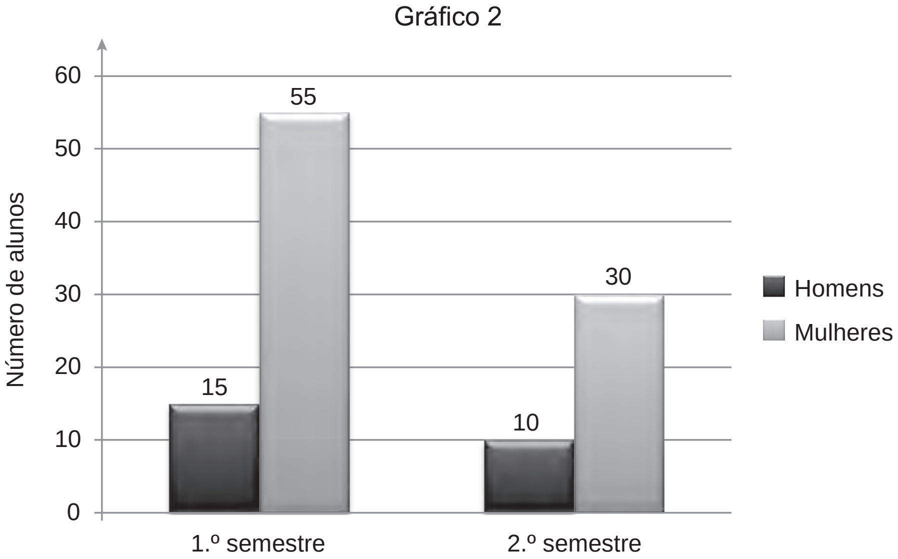
Escolheu-se, ao acaso, um destes alunos.

Determine a probabilidade de este aluno ter ficado alojado numa residência universitária.

Apresente o resultado na forma de dízima.

9. Foram escolhidos, ao acaso, 110 alunos universitários que participaram no programa Erasmus+ num único semestre.

No Gráfico 2, estão representados os dados referentes ao sexo e ao semestre de participação desses alunos.



*** 9.1.** Escolhendo, ao acaso, um destes alunos, qual é a probabilidade de o aluno ter participado no programa Erasmus+ no segundo semestre, sabendo-se que é do sexo masculino?

(A) $0{,}25$ **(B)** $0{,}4$ **(C)** $0{,}09$ **(D)** $0{,}625$

*** 9.2.** Escolhem-se, ao acaso, três alunos, sempre um a seguir ao outro.

Determine a probabilidade de apenas um deles ter participado no segundo semestre e ser do sexo feminino.

Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

9.3. Admita que a média da nota de candidatura dos alunos que participaram no programa Erasmus+ no primeiro semestre foi 15,65 valores e que a média da nota de candidatura dos alunos que participaram no programa Erasmus+ no segundo semestre foi 14,22 valores.

Determine a média da nota de candidatura destes 110 alunos universitários.

Apresente o resultado na forma de dízima.

*** 10.** Dos alunos que participaram no programa Erasmus+ em 2019, foram selecionados aleatoriamente 324, tendo-se apurado que a média das suas idades era 20,16 anos, com um desvio padrão de 21 meses.

Construa um intervalo de confiança a 99% para a idade média, em anos, dos alunos que participaram no programa Erasmus+ em 2019.

Apresente os extremos do intervalo de confiança, com arredondamento às centésimas.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**2.**	**3.**	**5.1.**	**6.1.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	12	18	12	18	18	12	18	18	**146**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**1.**	**4.**	**5.2.**	**6.2.**	**9.3.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 x 18 pontos									**54**
TOTAL										**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 835

2.ª Fase