REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2022

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 27-B/2022, de 23 de março

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X:
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X:
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

*** 1.** A Inês está a fazer um plano de treinos que inclui corrida. Em cada treino de corrida, utilizou uma aplicação para obter a distância percorrida e a energia gasta.

Na tabela ao lado, apresentam-se os valores registados em alguns desses treinos, sendo x a distância percorrida, em km, e y a correspondente energia gasta, em calorias.

Admita como válido o modelo de regressão linear de y sobre x obtido a partir dos dados apresentados nesta tabela.

Num dos treinos de corrida, a aplicação não funcionou corretamente, mas a Inês sabe que, nesse treino, correu $9\ \text{km}$.

Estime, com base nesse modelo de regressão linear, a energia, em calorias, gasta pela Inês nesse treino de corrida.

Na sua resposta, apresente:

– os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às centésimas;

– o valor pedido arredondado às unidades.

Distância percorrida em km (x)	**Energia gasta** em calorias (y)
5	340
6,5	450
7	478
7,7	515
8	550
8,6	580
9,4	630

*** 2.** Num ginásio, vão ser indicadas, ao acaso, duas pessoas de uma aula de dança, para exemplificar uma coreografia.

Considere a variável aleatória Y «número de homens indicados para exemplificar a coreografia».

Sabe-se que $P(Y=0)=\dfrac{9}{65}$ e que $P(Y=1)=\dfrac{32}{65}$.

Seja X a variável aleatória «número de mulheres indicadas para exemplificar a coreografia».

Determine o valor médio da variável aleatória X .

Na sua resposta, apresente:

– a tabela de distribuição de probabilidades da variável aleatória X ;

– o valor pedido arredondado às centésimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

*** 3.** Uma empresa de construção civil dispõe de uma licença da câmara municipal para construção de apartamentos T2 e de apartamentos T3 numa determinada zona urbana desse município.

Cada apartamento T2 vai ser vendido por $150\ 000$ euros, e cada apartamento T3 vai ser vendido por $250\ 000$ euros.

A licença da câmara municipal obriga ao cumprimento das seguintes condições:

- o número de apartamentos T2 construídos não deve exceder o dobro do número de apartamentos T3 construídos;
- o número de apartamentos T3 construídos não deve exceder o triplo do número de apartamentos T2 construídos;
- o número total de apartamentos construídos não deve exceder 60 .

Determine o valor máximo que a empresa poderá receber, em euros, com a venda de todos os apartamentos construídos.

Na sua resposta, designe por x o número de apartamentos T2 e por y o número de apartamentos T3 a construir pela empresa, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor pedido.

4. Um agente imobiliário dispõe de 60 apartamentos para arrendar.

Devido às flutuações do mercado de arrendamento, o agente decidiu fixar o valor das rendas, arrendando todos os apartamentos pelo mesmo valor.

O agente admite que o mercado de arrendamento satisfaz as seguintes condições:

A) se o valor da renda por apartamento for 0 euros, todos os apartamentos serão arrendados;

B) se o valor da renda por apartamento for 3000 euros, não será arrendado qualquer apartamento;

C) para valores da renda por apartamento entre 0 euros e 3000 euros, por cada 50 euros de aumento da renda por apartamento, será arrendado menos um apartamento.

Esta situação foi traduzida para o seguinte modelo linear:

$$N(p) = -\frac{1}{50}p + 60 \quad , \quad \text{com} \quad 0 \leq p \leq 3000$$

em que p é o valor da renda, em euros, e $N(p)$ é o número de apartamentos arrendados por p euros.

4.1. Mostre que o modelo apresentado satisfaz as três condições referidas.

*** 4.2.** O rendimento, R , em euros, que o agente imobiliário obterá é dado por

$$R(p) = p \times N(p)$$

Determine o valor da renda por apartamento a que corresponde o maior rendimento possível, de acordo com os modelos apresentados.

5. Seja f a função que dá a altitude, em metros, de cada ponto de um percurso de $40\ \mathrm{km}$, ao longo de uma prova de BTT, para cada valor da distância percorrida, x, em quilómetros, desde o ponto de partida.

Admita que

$$f(x) = 600 + 0{,}004\,(x^3 - 50x^2 + 400x)e^{0{,}01x-1} \quad , \quad \text{com} \quad 0 \leq x \leq 40$$

* **5.1.** Determine a diferença entre as altitudes do ponto de partida e do ponto de chegada da prova de BTT.

* **5.2.** Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o número total de quilómetros da prova de BTT em que a altitude é superior a 598 metros.

Apresente o resultado em quilómetros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, três casas decimais.

6. O Tomé faz treinos de bicicleta, no ginásio, para se preparar para as provas de BTT em que participa.

Seja T a função que dá a taxa de variação instantânea do valor da velocidade registado na bicicleta do Tomé durante um desses treinos, x minutos após o seu início.

Na Figura 1, apresenta-se o gráfico da função T, com $0 \leq x \leq 35$.

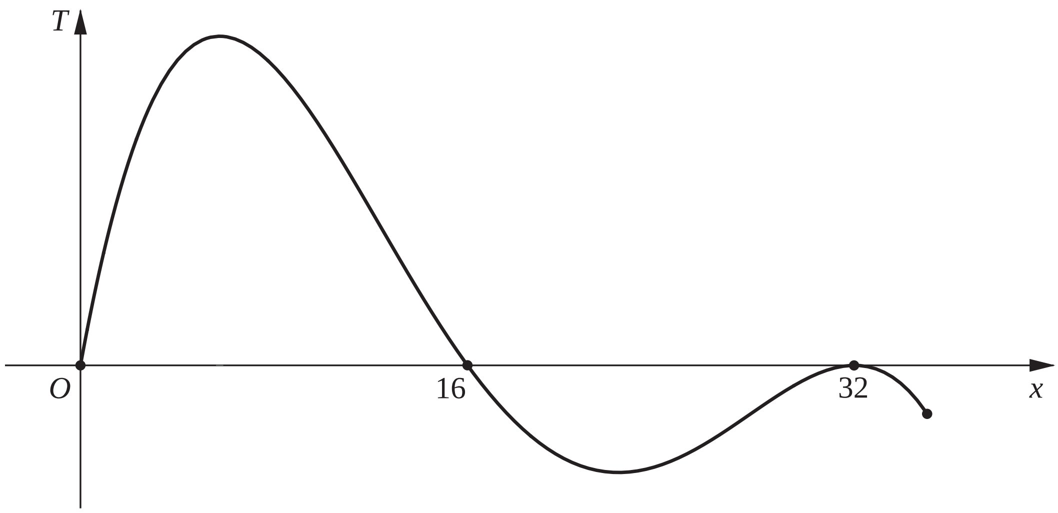

Figura 1

Tal como a figura ilustra, os zeros da função T são 0, 16 e 32.

Em que instante é que a velocidade foi máxima durante esse treino?

Justifique a sua resposta.

7. Na Figura 2, está representado um friso constituído por cinco azulejos retangulares e iguais.

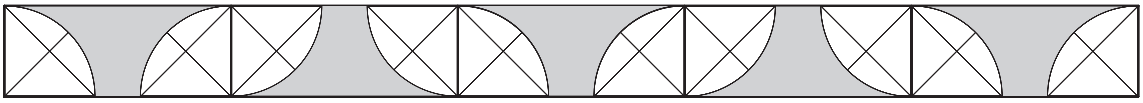

Figura 2

Cada azulejo apresenta dois quartos de círculo de raio igual à largura do azulejo.

Na Figura 3, está representado um azulejo, em referencial ortogonal e monométrico, Oxy.

Nesta figura, que não está à escala:

- o retângulo $[OABC]$ representa o azulejo;
- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox;
- o ponto C tem coordenadas $(0, 12)$;
- os pontos D e E pertencem a $[OC]$;
- o arco de circunferência AE tem centro no ponto O, e o arco de circunferência DB tem centro no ponto C;
- a reta DB é definida pela equação $y = x + 7$.

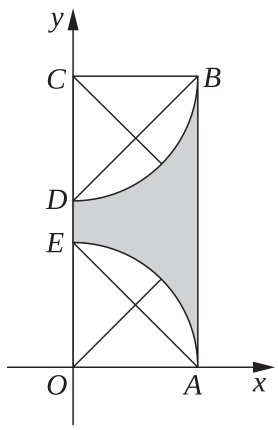

Figura 3

No referencial, a unidade é o centímetro.

* **7.1.** Determine a área da região sombreada nos cinco azulejos do friso representado na Figura 2.

Na sua resposta, apresente o resultado em centímetros quadrados, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

7.2. Na Figura 4, os retângulos $[UPQT]$ e $[RSTQ]$ representam os dois primeiros azulejos do friso.

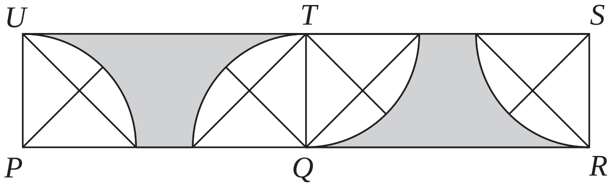

Figura 4

O retângulo $[RSTQ]$ é o transformado do retângulo $[UPQT]$ por meio de uma rotação.

Identifique o centro e a amplitude dessa rotação.

8. Na Figura 5, esquematizam-se as três primeiras etapas da construção de uma sequência de quadrados.

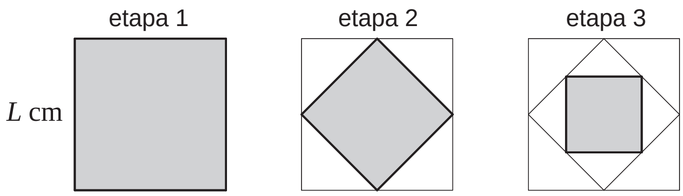

Figura 5

Como a figura ilustra:

- na etapa 1, considera-se um quadrado inicial, de lado $L\ \text{cm}$, o quadrado de ordem 1;
- na etapa 2, unem-se os pontos médios do quadrado de ordem 1, obtendo-se o quadrado de ordem 2;
- na etapa 3, unem-se os pontos médios do quadrado de ordem 2, obtendo-se o quadrado de ordem 3;
- e assim sucessivamente, obtendo-se uma sequência de quadrados inscritos uns nos outros.

8.1. Mostre que a área do quadrado de ordem n desta sequência pode ser dada, em centímetros quadrados, por

$$A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

* **8.2.** Sabe-se que o quadrado de ordem 12 da sequência tem $0{,}5\ \text{cm}^2$ de área.

Determine o valor de L.

Note que a área do quadrado de ordem n desta sequência pode ser dada, em centímetros quadrados, por $A_n = L^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

9. Nas *Bucólicas*, de Vergílio, pode ler-se o seguinte verso:

«e o Sol **duplica**, declinando, **as sombras** crescentes.»

Vergílio, *Bucólicas*, II, 67, tradução de Frederico Lourenço, Lisboa, Quetzal, 2021.

A observação que inspira o poeta é feita no final do dia e demora um quarto de hora.

O esquema da Figura 6 ilustra a situação.

Neste esquema, que não está à escala:

- $[AB]$ representa uma árvore;
- $[BC]$ representa a sombra da árvore no início da observação;
- $[BD]$ representa a sombra da árvore no fim da observação;
- $\overline{BD} = 2\,\overline{BC}$;
- α é a amplitude, em graus, do ângulo BAC ;
- β é a amplitude, em graus, do ângulo BAD .

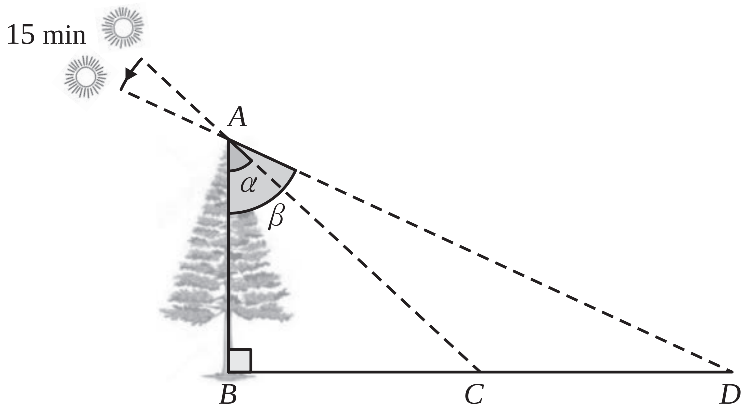

Figura 6

9.1. Mostre que $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.

* **9.2.** Determine a quantos minutos do pôr do sol tem início a observação da duplicação das sombras, admitindo que $\beta = \alpha + 3{,}75^\circ$.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

Na sua resolução, tenha em consideração que $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$ e que o Sol, no seu movimento aparente, percorre um arco de 15° por hora.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**7.1.**	**8.2.**	**9.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	16	16	20	16	16	20	16	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.1.**	**6.**	**7.2.**	**8.1.**	**9.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**