REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2023

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 22/2023, de 3 de abril

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente todos os elementos visualizados na sua utilização, mais precisamente, consoante a situação:

- os gráficos obtidos, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2 \pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

- **Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$
- **Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Probabilidades e Estatística

Se X é uma variável aleatória discreta de valores x_i com probabilidade p_i, então:

- **Valor médio** de X :
  $\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$
- **Desvio padrão** de X :
  $\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é uma variável aleatória normal de valor médio μ e desvio padrão σ, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

*** 1.** Uma empresa decidiu produzir dois tipos de concentrado de frutas, ambos feitos à base de maçã, pera e romã.

Cada quilograma de concentrado do tipo I é vendido a $2{,}50\ €$ e contém $0{,}45\ \mathrm{kg}$ de maçã, $0{,}40\ \mathrm{kg}$ de pera e $0{,}15\ \mathrm{kg}$ de romã.

Cada quilograma de concentrado do tipo II é vendido a $3{,}00\ €$ e contém $0{,}40\ \mathrm{kg}$ de maçã, $0{,}25\ \mathrm{kg}$ de pera e $0{,}35\ \mathrm{kg}$ de romã.

A empresa dispõe, diariamente, de $218{,}50\ \mathrm{kg}$ de maçã, de $168{,}15\ \mathrm{kg}$ de pera e de $140{,}00\ \mathrm{kg}$ de romã.

A empresa tem garantida a venda de toda a produção diária dos dois tipos de concentrado.

Quantos quilogramas de concentrado do tipo I e quantos quilogramas de concentrado do tipo II devem ser produzidos, diariamente, pela empresa, para que o valor de vendas do total dos dois concentrados seja máximo?

Na sua resposta, designe por x o número de quilogramas de concentrado do tipo I e por y o número de quilogramas de concentrado do tipo II a produzir, diariamente, pela empresa, e apresente:

– a função objetivo;

– as restrições do problema;

– uma representação gráfica referente ao sistema de restrições;

– o valor de x e o valor de y correspondentes à solução do problema.

*** 2.** O número de dias por semana em que se tem de regar o jardim depende essencialmente das condições meteorológicas. Nos meses de verão, o Sr. Ferreira tem de regar o jardim com muita frequência.

Seja X a variável aleatória «Número de dias, numa semana de verão, em que o Sr. Ferreira rega o jardim», com $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

Admita que:

$$P(X=1)=0{,}01\,;\ P(X=2)=0{,}02\,;\ P(X=3)=0{,}05\,;\ P(X=4)=0{,}09\,;$$
$$P(X=5)=0{,}41\,;\ P(X=6)=0{,}21\,;\ P(X=7)=0{,}21\,.$$

Considera-se, ao acaso, uma semana de verão.

Qual é a probabilidade, de acordo com a variável aleatória X, de o Sr. Ferreira não regar o jardim nessa semana?

Justifique a sua resposta.

3. O neto do Sr. Ferreira está a treinar a escrita das letras maiúsculas. Para o ajudar nessa aprendizagem, o Sr. Ferreira desenhou, numa folha, círculos iguais e tangentes, dispostos como a Figura 1 sugere.

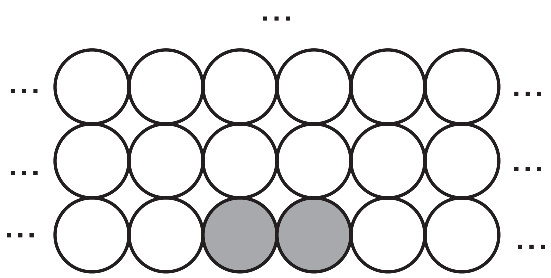

Figura 1

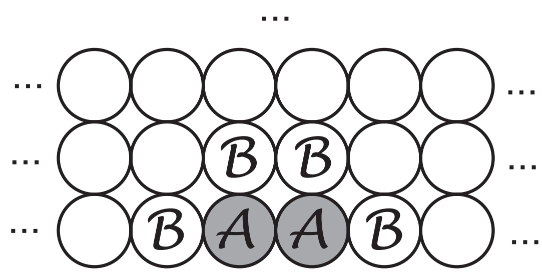

Figura 2

A atividade que o neto do Sr. Ferreira deve executar é a seguinte:

- começar por escrever a letra A nos dois círculos sombreados na Figura 1;
- de seguida, escrever a letra B em todos os círculos tangentes a algum dos dois círculos assinalados com a letra A, como se ilustra na Figura 2;
- e assim sucessivamente, seguindo o alfabeto, assinalando, para cada letra, todos os círculos tangentes a, pelo menos, um círculo que esteja assinalado com a letra anterior.

* **3.1.** Determine quantos círculos serão assinalados com a $15.^{\text{a}}$ letra do alfabeto.

3.2. Num certo momento da execução da atividade, o Sr. Ferreira verificou que o neto já tinha assinalado um total de 72 círculos.

Qual foi a letra escrita no $72.^{\text{o}}$ círculo?

Justifique a sua resposta.

4. Admita que a altura de uma árvore, h, em metros, t anos após ter sido plantada, é dada por

$$h(t) = \frac{13}{1 + 19{,}26e^{-0{,}58t}} \quad , \text{ com } t \geq 0$$

* **4.1.** Determine quantos centímetros cresceu a árvore durante o primeiro ano após ter sido plantada.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

*** 4.2.** Quanto tempo decorreu entre o instante em que a árvore foi plantada e o instante em que ultrapassou os 7 metros de altura, de acordo com o modelo apresentado?

Apresente o valor pedido em anos e meses, com o número de meses arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

4.3. É possível esta árvore atingir $13,5$ metros de altura, de acordo com o modelo apresentado?

Justifique a sua resposta.

*** 5.** O gráfico da Figura 3 foi construído a partir de dados do Instituto Nacional de Estatística (INE) e diz respeito à produção total acumulada de batata de sequeiro em Portugal continental, de 2017 a 2021, desde o início de 2017.

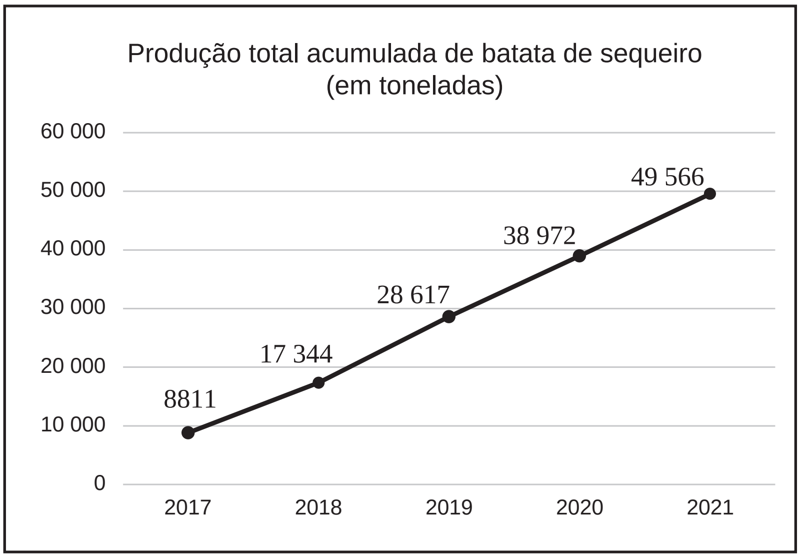

Figura 3

Para 2022, o INE previa uma redução de 15% da produção anual de batata de sequeiro relativamente à produção anual em 2021, em Portugal continental.

Determine o valor da produção anual de batata de sequeiro previsto pelo INE para 2022, em Portugal continental.

Apresente o valor pedido em milhares de toneladas, arredondado às unidades de milhar.

6. Na quinta do Sr. Ferreira, existe um depósito de água para rega. Considere que para se encher o depósito, que estava inicialmente vazio, se usou uma torneira com caudal constante.

Seja f a função que dá a altura, em metros, de água no depósito, t horas desde o instante em que se começou a encher o depósito, até ao instante em que ficou cheio, durante 6 horas.

Quando o depósito está cheio, a altura de água coincide com a altura do depósito.

Na Figura 4, está representado, em referencial ortogonal e monométrico, o gráfico da função f.

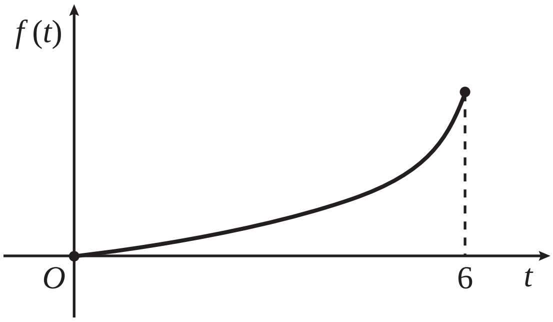

Figura 4

6.1. Em que instante a taxa de variação instantânea da função f tem maior valor:

em $t = 0{,}5$ ou em $t = 5{,}5$?

Justifique a sua resposta.

* **6.2.** Na Figura 5, estão representados esquemas das formas de dois depósitos, na posição em que são enchidos.

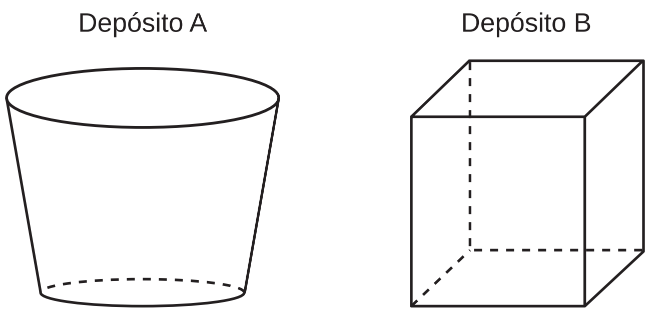

Figura 5

Justifique que nenhum desses depósitos pode ser o existente na quinta do Sr. Ferreira, apresentando uma razão para cada um dos depósitos.

7. Um biombo decorado com motivos geométricos, existente na casa da quinta do Sr. Ferreira, tem desenhadas circunferências no seu painel central, como se ilustra na Figura 6.

Na Figura 7, representa-se uma parte do painel central do biombo, que tem quatro dessas circunferências.

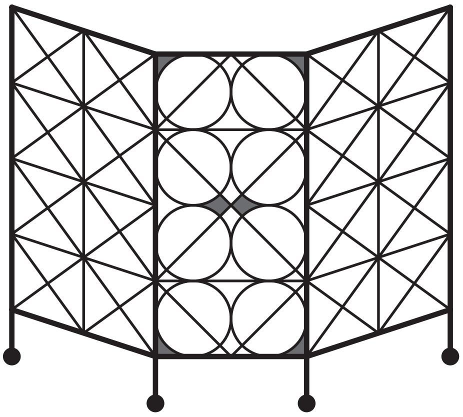

Figura 6

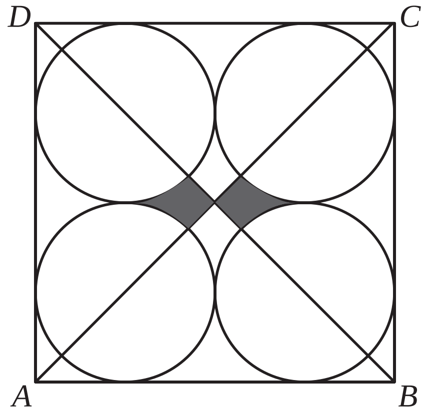

Figura 7

No esquema da Figura 7, que não está à escala, estão representados:

- um quadrado, $[ABCD]$;
- quatro circunferências geometricamente iguais, de raio igual a $10\ \text{cm}$, tangentes entre si e tangentes aos lados do quadrado;
- as duas diagonais do quadrado;
- duas regiões sombreadas, na zona central do quadrado.

7.1. Determine a área total das regiões sombreadas na zona central do quadrado representado na Figura 7.

Apresente o resultado em centímetros quadrados, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

*** 7.2.** Numa circunferência geometricamente igual às da Figura 7, fixou-se um referencial ortogonal e monométrico, Oxy , como se representa na Figura 8. No referencial, a unidade é o centímetro.

Nesta figura:

- o ponto P , centro da circunferência, tem coordenadas $(30, 40)$;
- o ponto Q pertence à circunferência e à reta OP .

Determine as coordenadas do ponto Q .

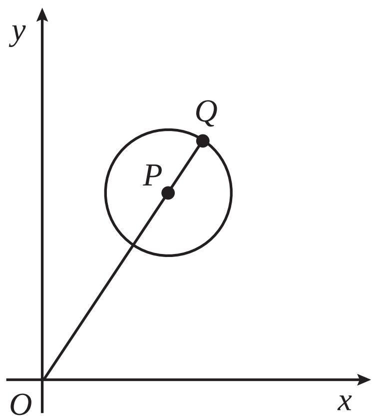

Figura 8

8. Os esquemas I e II, da Figura 9, mostram o modelo de uma das primeiras bicicletas, com as rodas assentes num solo plano e horizontal.

Com a bicicleta imobilizada, foram assinalados os pontos A e B, sendo A o ponto da roda traseira e B o ponto da roda dianteira que estão em contacto com o solo e à distância de 90 cm um do outro, como se sugere no esquema I.

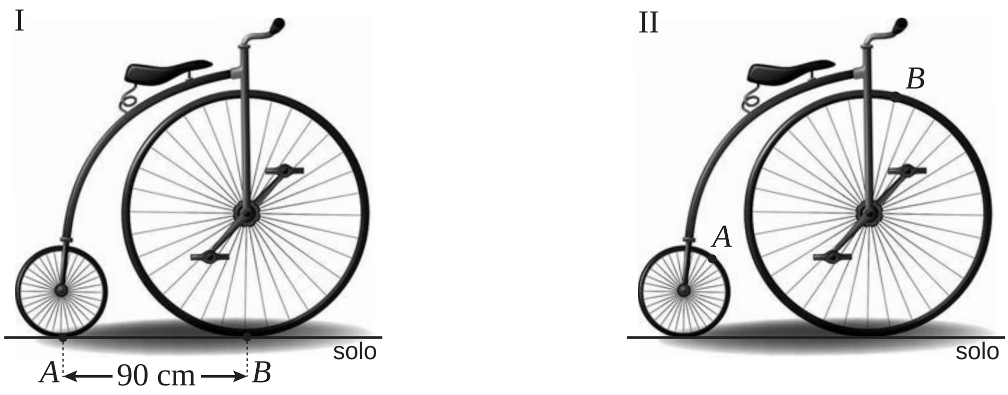

Figura 9

Posteriormente, a bicicleta foi posta em movimento durante 10 segundos. Sabe-se que andou em linha reta a uma velocidade constante, que as duas rodas se mantiveram num mesmo plano vertical, e que nenhuma das rodas derrapou, nem patinou, nem rodou para trás.

No esquema II, ilustra-se uma das posições dos pontos A e B durante esse movimento.

Considerando que a espessura dos pneus é desprezável, admita que, t segundos após a bicicleta ter sido posta em movimento, as distâncias ao solo, em centímetros, dos pontos A e B são dadas, respetivamente, por

$$a(t) = 20 - 20\cos\left(\frac{25\pi}{16}t\right) \quad \text{e por} \quad b(t) = 62{,}5 - 62{,}5\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right), \quad \text{com } 0 \le t \le 10$$

O argumento da função cosseno está em radianos.

8.1. Mostre que o raio da roda traseira mede 20 cm.

* **8.2.** Determine a distância entre os pontos A e B oito segundos após a bicicleta ter sido posta em movimento.

Na sua resposta, apresente o resultado em centímetros, arredondado às unidades.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.1.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.2.**	**7.2.**	**8.2.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	20	16	16	16	16	16	20	16	16	**152**
Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**3.2.**	**4.3.**	**6.1.**	**7.1.**	**8.1.**					**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 16 pontos									**48**
TOTAL										**200**