Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 15 Páginas

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados.

Formulário

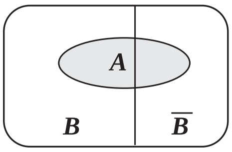
Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

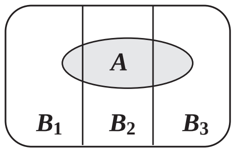
Teorema da probabilidade total e regra de Bayes



$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) =$$
$$= P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$



$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$
$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} =$$

$$= \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores 1, 2 ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$$
$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$$
$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável aleatória X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\hat{p} - z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \ \hat{p} + z\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\hat{p}$ – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*****)

(*****) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	90%	95%	99%
z	1,645	1,960	2,576

Sala de Fuga é um jogo em que uma equipa, fechada numa sala ou num conjunto de salas, tem de resolver desafios, num intervalo de tempo limitado, para o conseguir concluir. Para ter sucesso e resolver os desafios, é necessário recorrer a diversas competências e apelar ao raciocínio lógico e à intuição.

* **1.** Uma equipa de 10 elementos vai participar num jogo de *Sala de Fuga*.

Voluntariaram-se para capitão da equipa três dos seus elementos, o Artur (A), o Bruno (B) e o César (C).

Para determinar o capitão, cada um dos 10 elementos da equipa vota, preenchendo um boletim de voto no qual ordena os três candidatos de acordo com as suas preferências. Cada boletim preenchido com uma determinada ordenação corresponde a 1 voto.

Concluída a votação, aplica-se o método a seguir descrito.

- São atribuídos pontos a cada um dos candidatos, em função do seu lugar na ordem da lista de preferências. Cada candidato recebe:
  - cinco pontos por cada voto na primeira preferência;
  - três pontos por cada voto na segunda preferência;
  - um ponto por cada voto na terceira preferência.
- Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos candidatos, e o que obtiver mais pontos será o escolhido para capitão da equipa.
- Em caso de empate, o capitão será escolhido por sorteio.

A Tabela 1 apresenta as preferências resultantes da votação, sem contemplar o voto da Daniela, um dos elementos da equipa.

Tabela 1

N.º de votos / **Preferências**	**3**	**2**	**3**	**1**
1.ª	A	C	B	A
2.ª	B	A	C	C
3.ª	C	B	A	B

Depois de contabilizar o voto da Daniela, foi possível apurar que:

- não houve candidatos com o mesmo número de pontos;
- o Artur foi o escolhido para capitão da equipa;
- o César ficou em segundo lugar.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Antes de contabilizar o voto da Daniela, o candidato que estava em primeiro lugar tinha ___**I**___ pontos, e o candidato ___**II**___ estava em segundo lugar.

Depois de contabilizados os 10 votos, o candidato vencedor obteve ___**III**___ pontos.

Na lista de preferências da Daniela, o candidato ___**IV**___ estava na primeira preferência.

I	II	III	IV
a) 31 **b)** 29 **c)** 27	**a)** A **b)** B **c)** C	**a)** 32 **b)** 34 **c)** 36	**a)** A **b)** B **c)** C

✱ 2. Numa escola secundária, estão inscritos 1254 alunos distribuídos pelos três cursos existentes: o curso de Ciências e Tecnologias (CT), o curso de Línguas e Humanidades (LH) e o curso de Ciências Socioeconómicas (SE). Decidiu-se que uma equipa formada por 10 elementos, escolhidos de entre os alunos inscritos na escola, iria participar num jogo de *Sala de Fuga*.

Na Tabela 2, está registado o número de alunos inscritos em cada curso.

Tabela 2

Curso	**CT**	**LH**	**SE**
Número de alunos	530	384	340

Para preencher as 10 vagas na equipa, usou-se o método a seguir descrito.

Passo 1: Determina-se a quota (Q)

$$Q = \frac{\text{Número total de alunos da escola}}{\text{Número total de vagas na equipa} + 1}$$

Passo 2: Divide-se o número de alunos inscritos em cada curso por Q.

Passo 3: Atribui-se a cada curso o número de vagas na equipa igual à parte inteira do respetivo quociente obtido no passo anterior.

Passo 4: Caso ainda falte preencher alguma vaga na equipa, procede-se do modo seguinte:

- divide-se o número de alunos inscritos em cada curso pela soma do número de vagas que já lhe foi atribuído com 1;
- atribui-se mais uma vaga na equipa ao curso a que corresponder o maior quociente, calculado no ponto anterior.

Repete-se este passo até que todas as vagas na equipa sejam preenchidas.

Determine quantos alunos de cada um dos cursos preencheram as vagas na equipa, de acordo com o método acima descrito.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

3. O funcionamento de um jogo de *Sala de Fuga* acarreta diversas despesas, nomeadamente com a eletricidade.

Analisando uma fatura de eletricidade, é possível verificar que o valor a pagar resulta da soma de diversas parcelas. Umas dependem do consumo de eletricidade, medido em quilowatt-hora (kWh), ou do número de dias de consumo, ao passo que outras têm valor fixo.

Admita que o valor a pagar (V), em euros, resulta da aplicação da fórmula de cálculo seguinte:

$$\mathrm{V} = \mathrm{C} + \mathrm{IEC} + \mathrm{PC} + \mathrm{AR} + \mathrm{CA} + \mathrm{TE}$$

Em que:

- C é o consumo, em euros, calculado em função do total de kWh consumidos;
- IEC é o imposto especial de consumo, em euros, calculado em função do total de kWh consumidos;
- PC é a potência contratada, em euros, calculada em função do número total de dias de consumo;
- AR é o acesso às redes, em euros, calculado em função do número total de dias de consumo;
- CA é a contribuição audiovisual, cujo valor final é 3,02 €;
- TE é a taxa de exploração, cujo valor final é 0,09 €.

Sobre algumas das parcelas incide ainda o imposto sobre o valor acrescentado (IVA).

Na Tabela 3, está registado o preço unitário dessas parcelas, sem a aplicação do IVA, e a taxa de IVA que lhes é aplicada, exceto a do consumo (C).

Tabela 3

	Preço (€) sem IVA	**IVA (%)**
C	0,1476 por kWh	
IEC	0,001 por kWh	23
PC	0,1263 por dia	23
AR	0,0299 por dia	6

Num período de 31 dias, em que foram consumidos 450 kWh, o valor a pagar (V) foi 79,87 €.

Qual é a taxa de IVA aplicada ao consumo (C)?

Apresente a sua resposta em percentagem, arredondada às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

4. Numa das salas de um jogo de *Sala de Fuga*, estava exposto um conjunto de seis cartas, A, B, C, D, E e F, semelhante ao apresentado na Figura 1.

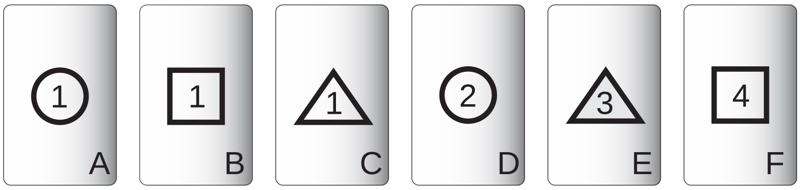


Figura 1

Nas cartas A e D está desenhado um círculo, nas cartas B e F, um quadrado, e nas cartas C e E, um triângulo. As cartas A, B e C estão numeradas com o algarismo 1, a carta D com o 2, a carta E com o 3 e a carta F com o 4.

Junto às cartas, estava um pergaminho com o desafio seguinte.

Descobre a carta desaparecida

O conjunto tinha inicialmente sete cartas, não existindo duas cartas com figuras geométricas iguais numeradas com o mesmo algarismo.

A sétima carta desapareceu...

As sete cartas, as seis apresentadas mais a carta desaparecida, podem ser empilhadas umas sobre as outras, sendo que a carta seguinte terá de ter a mesma figura geométrica ou o mesmo algarismo que a anterior.

A carta desaparecida tem um quadrado numerado com um algarismo já utilizado numa das restantes cartas.

Qual é o algarismo presente na sétima carta, no empilhamento em que as três primeiras cartas são a D, a A e a B, por esta ordem?

A equipa do Filipe verificou que, por exemplo, a carta B poderia ser colocada sobre a carta F, porque ambas têm desenhado um quadrado, ou então a carta C poderia ser colocada sobre a carta A, porque ambas têm o algarismo 1.

Para agilizar a resolução do desafio, a equipa decidiu construir um grafo. Nesse grafo, a letra de cada carta correspondia a um vértice, e as arestas representavam a possibilidade de uma carta ser empilhada sobre outra.

O algarismo presente na sétima carta (carta G) poderá ser o 3?

Na sua resposta, apresente:

– um grafo semelhante ao que a equipa terá construído, sem incluir a carta G;

– um possível empilhamento das sete cartas, A, B, C, D, E, F e G.

5. Uma empresa especializada em jogos de *Sala de Fuga* desenvolveu uma aplicação que permite participar num jogo de *Sala de Fuga online*.

De 1 de janeiro de 2016 até 31 de dezembro de 2019, o número aproximado de utilizadores da aplicação, em centenas, é dado pela expressão

$$N(t) = 9{,}4 - 2{,}01 \log_{10}(t+1),$$

em que t representa o número de meses após o dia 1 de janeiro de 2016.

A partir de 1 de janeiro de 2020, o número aproximado de utilizadores da aplicação, em centenas, passa a ser dado pela expressão

$$P(t) = \frac{30}{1 + 4e^{-0{,}2t}},$$

em que t representa o número de meses após o dia 1 de janeiro de 2020.

* **5.1.** O modelo P permite estimar para que valor tende o número de utilizadores da aplicação com o passar do tempo.

Qual é esse valor?

(A) 300

(B) 600

(C) 3000

(D) 6000

5.2. Mostre que, no decorrer do ano de 2021, houve um momento em que o número de utilizadores da aplicação atingiu o triplo do que existia a 1 de fevereiro de 2016.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve três casas decimais.

Para responder a esta questão, recorra às capacidades gráficas da sua calculadora e apresente:

– o(s) gráfico(s) visualizado(s);

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) relevante(s), com arredondamento às centésimas.

* **5.3.** No primeiro dia de alguns meses, o número de utilizadores da aplicação foi superior a 700 e inferior a 900.

Em quantos meses tal sucedeu?

(A) 14

(B) 16

(C) 18

(D) 20

6. Num determinado jogo de *Sala de Fuga*, registou-se, mensalmente, o número de equipas que nele participaram e, destas, quantas o concluíram e quantas não o concluíram.

6.1. Na Figura 2, estão organizados os dados recolhidos, referentes a cinco meses.

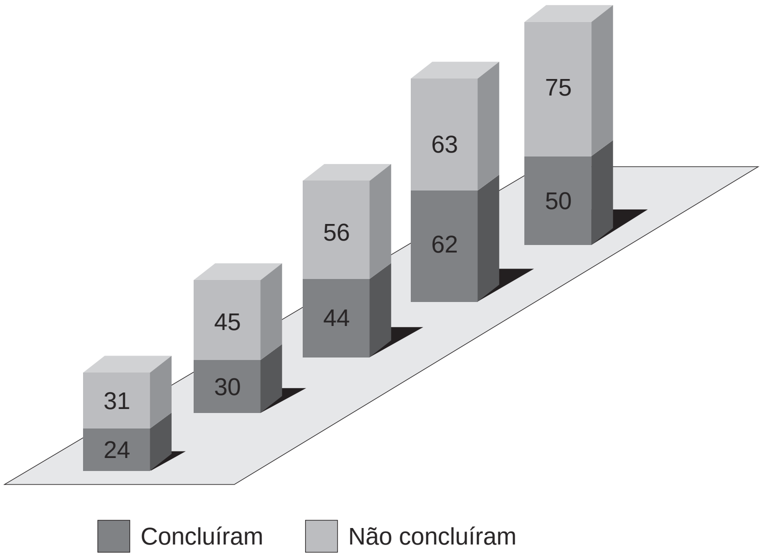


Figura 2

Admita que a relação entre as variáveis «número de equipas que participaram neste jogo de *Sala de Fuga*» (x), num determinado mês, e «número de equipas que concluíram o jogo de *Sala de Fuga*» (y), nesse mesmo mês, é bem aproximada por uma regressão linear, na forma $y = ax + b$, com os valores de a e de b estimados com base nos dados apresentados na Figura 2.

Num outro mês, participaram neste jogo de *Sala de Fuga* 80 equipas.

Estime o número de equipas que o concluiu nesse mês, com base no modelo de regressão linear.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Na sua resposta, apresente:

– as listas que introduziu na calculadora;

– a equação da reta de regressão, com os valores de a e de b arredondados com três casas decimais.

6.2. Na Figura 3, são apresentados os dados referentes à idade, em anos, organizada nas classes $[18, 28[$, $[28, 38[$, $[38, 48[$, dos capitães das equipas que participaram no jogo de *Sala de Fuga* num determinado mês, divididos em função do facto de a sua equipa ter concluído, ou não, o jogo de *Sala de Fuga*.

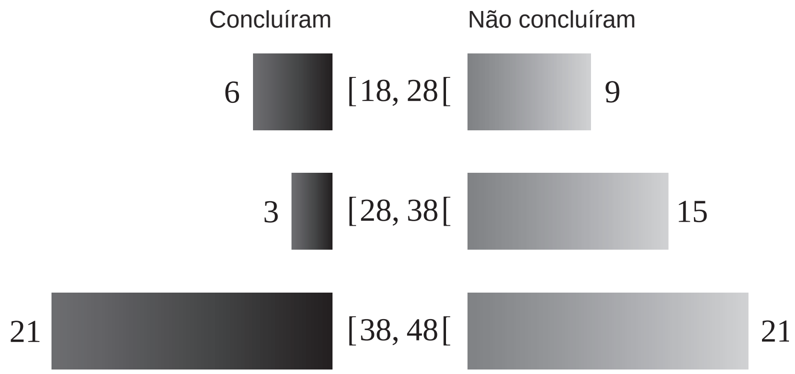


Figura 3

Associe a cada classe, apresentada na Coluna **I**, as afirmações da Coluna **II** que lhe correspondem.

Cada um dos números, de 1 a 7, deve ser associado apenas a uma letra, e todos os números devem ser utilizados.

Escreva na folha de respostas cada uma das letras da Coluna **I**, seguida do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna **II**.

COLUNA I	COLUNA II
(a) $[18, 28[$ **(b)** $[28, 38[$ **(c)** $[38, 48[$	**(1)** Das equipas que concluíram o jogo de *Sala de Fuga*, o número de capitães cuja idade pertence a esta classe é o menor. **(2)** 56% dos capitães de equipa têm idade pertencente a esta classe. **(3)** A quinta parte dos capitães das equipas que não concluíram o jogo de *Sala de Fuga* tem idade pertencente a esta classe. **(4)** É a classe em que é maior a diferença entre o número de capitães das equipas que concluíram o jogo de *Sala de Fuga* e o número de capitães das equipas que não o concluíram. **(5)** Considerando a totalidade dos capitães das equipas, é a classe modal das suas idades. **(6)** Considerando a totalidade dos capitães das equipas, é a classe mediana das suas idades. **(7)** O primeiro quartil das idades dos capitães das equipas que não concluíram o jogo de *Sala de Fuga* pertence a esta classe.

7. Junto das equipas que concluíram o desafio de um jogo de *Sala de Fuga*, foi realizado um estudo estatístico relativo ao tempo, em minutos, que as mesmas demoraram para o concluir.

Na Tabela 4, estão parcialmente registados os dados recolhidos.

Tabela 4

Tempo (em minutos)	**Número de equipas**	**Frequência relativa simples (%)**	**Frequência relativa acumulada (%)**
$]0,10]$	x		12,5
$]10,20]$		y	52,5
$]20,30]$			60
$]30,40]$	12		70
$]40,50]$			z
$]50,60]$		7,5	100

* **7.1.** Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A variável estatística em estudo é uma variável ___**I**___ .

De acordo com a informação disponível na Tabela 4, o valor de y é ___**II**___ , o valor de z é ___**III**___ , e o valor de x é ___**IV**___ .

I	**II**	**III**	**IV**
a) qualitativa **b)** quantitativa discreta **c)** quantitativa contínua	**a)** 20 **b)** 30 **c)** 40	**a)** 80 **b)** 92,5 **c)** 97,5	**a)** 15 **b)** 17 **c)** 18

7.2. Certo dia, a Joana, uma das funcionárias do jogo de *Sala de Fuga*, tirou uma fotografia a cada uma das equipas que concluiu o desafio num tempo, em minutos, pertencente ao intervalo $]30,40]$.

Admita que, das equipas fotografadas pela Joana, 25% concluíram o desafio num tempo superior a 35 minutos.

A Joana organizou as fotografias num álbum, colando, ao acaso, uma fotografia em cada página.

Qual é a probabilidade de apenas uma das duas fotografias colocadas nas duas primeiras páginas do álbum ser de uma equipa que terminou o desafio num tempo, em minutos, pertencente ao intervalo $]35,40]$?

Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

✱ 8. Dos capitães das equipas que, em 2023, participaram num jogo de *Sala de Fuga*, verificou-se que:

- a quarta parte participava pela primeira vez;
- 48% não participavam pela primeira vez e pertenciam a equipas que concluíram o desafio;
- 56% dos que participavam pela primeira vez pertenciam a equipas que concluíram o desafio.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Escolheu-se, ao acaso, um capitão de uma equipa que, em 2023, participou num jogo de *Sala de Fuga*.

A probabilidade de esse capitão já ter participado anteriormente num jogo de *Sala de Fuga* era ___**I**___ .

A percentagem de capitães que participava pela primeira vez num jogo de *Sala de Fuga* e cujas equipas concluíram o desafio foi ___**II**___ .

A probabilidade de o capitão pertencer a uma equipa que concluiu o desafio, sabendo-se que não participava pela primeira vez num jogo de *Sala de Fuga*, era ___**III**___ .

Conseguiram concluir o desafio ___**IV**___ das equipas destes capitães.

I	**II**	**III**	**IV**
a) 0,25	**a)** 8%	**a)** 0,36	**a)** 62%
b) 0,4	**b)** 14%	**b)** 0,48	**b)** 75%
c) 0,75	**c)** 31%	**c)** 0,64	**c)** 91%

9. Durante um determinado período de tempo, realizou-se uma campanha publicitária para divulgar quatro jogos de *Sala de Fuga*, A, B, C e D.

Após a campanha, com o intuito de saber qual era o preferido, foi selecionado, ao acaso, um conjunto de 900 pessoas de entre as que manifestaram intenção de participar num dos jogos de *Sala de Fuga* divulgados na campanha publicitária. Questionadas sobre o jogo de *Sala de Fuga* preferido, cada uma destas pessoas indicou A, B, C ou D.

Na Tabela 5, estão registadas as respostas obtidas.

Tabela 5

	A	**B**	**C**	**D**
Número de pessoas	200	250	324	126

* **9.1.** Escolheu-se, ao acaso, uma das pessoas questionadas.

Qual é a probabilidade de a pessoa escolhida ter preferido o jogo de *Sala de Fuga* A, sabendo-se que não indicou nem o C nem o D?

(A) $\frac{4}{9}$

(B) $\frac{5}{9}$

(C) $\frac{1}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

9.2. A amplitude de um intervalo de confiança para a proporção populacional relativa às pessoas que preferem o jogo de *Sala de Fuga* C, face ao número total de pessoas que têm intenção de participar num dos jogos de *Sala de Fuga* divulgados na campanha publicitária, é 0,06272.

Identifique o nível de confiança desse intervalo.

Na sua resposta, apresente o valor da proporção amostral.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>2.</td><td>4.</td><td>5.1.</td><td>5.3.</td><td>6.2.</td><td>7.1.</td><td>8.</td><td>9.1.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>15</td><td>19</td><td>19</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><td>143</td></tr>
<tr><td>Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="9">3. | 5.2. | 6.1. | 7.2. | 9.2.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="9">3 x 19 pontos</td><td>57</td></tr>
<tr><td colspan="10">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>

Prova 835

2.ª Fase

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática Aplicada às Ciências Sociais

Prova 835 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2024

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Braille

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 18 Páginas

---

A prova inclui 9 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 5 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário no final do enunciado da prova.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Sala de Fuga é um jogo em que uma equipa, fechada numa sala ou num conjunto de salas, tem de resolver desafios, num intervalo de tempo limitado, para o conseguir concluir. Para ter sucesso e resolver os desafios, é necessário recorrer a diversas competências e apelar ao raciocínio lógico e à intuição.

Item obrigatório

1. Uma equipa de 10 elementos vai participar num jogo de *Sala de Fuga*.

   Voluntariaram-se para capitão da equipa três dos seus elementos, o Artur (A), o Bruno (B) e o César (C).

   Para determinar o capitão, cada um dos 10 elementos da equipa vota, preenchendo um boletim de voto no qual ordena os três candidatos de acordo com as suas preferências. Cada boletim preenchido com uma determinada ordenação corresponde a 1 voto.

   Concluída a votação, aplica-se o método a seguir descrito.

   - São atribuídos pontos a cada um dos candidatos, em função do seu lugar na ordem da lista de preferências. Cada candidato recebe:
     - cinco pontos por cada voto na primeira preferência;
     - três pontos por cada voto na segunda preferência;
     - um ponto por cada voto na terceira preferência.
   - Contabiliza-se a pontuação total de cada um dos candidatos, e o que obtiver mais pontos será o escolhido para capitão da equipa.
   - Em caso de empate, o capitão será escolhido por sorteio.

   A Tabela 1 apresenta as preferências resultantes da votação, sem contemplar o voto da Daniela, um dos elementos da equipa.

   Tabela 1

	N.º de votos			
	3	2	3	1
1.ª P	A	C	B	A
2.ª P	B	A	C	C
3.ª P	C	B	A	B

   Depois de contabilizar o voto da Daniela, foi possível apurar que:

   – não houve candidatos com o mesmo número de pontos;

   – o Artur foi o escolhido para capitão da equipa;

   – o César ficou em segundo lugar.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Antes de contabilizar o voto da Daniela, o candidato que estava em primeiro lugar tinha ___I___ pontos, e o candidato ___II___ estava em segundo lugar.

Depois de contabilizados os 10 votos, o candidato vencedor obteve ___III___ pontos.

Na lista de preferências da Daniela, o candidato ___IV___ estava na primeira preferência.

I

a) 31

b) 29

c) 27

II

a) A

b) B

c) C

III

a) 32

b) 34

c) 36

IV

a) A

b) B

c) C

Item obrigatório

2. Numa escola secundária, estão inscritos 1254 alunos distribuídos pelos três cursos existentes: o curso de Ciências e Tecnologias (CT), o curso de Línguas e Humanidades (LH) e o curso de Ciências Socioeconómicas (SE). Decidiu-se que uma equipa formada por 10 elementos, escolhidos de entre os alunos inscritos na escola, iria participar num jogo de *Sala de Fuga*.

   Na Tabela 2, está registado o número de alunos inscritos em cada curso.

   Tabela 2

Curso	CT	LH	SE
N.º de alunos	530	384	340

   Para preencher as 10 vagas na equipa, usou-se o método a seguir descrito.

   Passo 1: Determina-se a quota (Q)

   $$Q = \frac{\text{Número total de alunos da escola}}{\text{Número total de vagas na equipa} + 1}$$

   Passo 2: Divide-se o número de alunos inscritos em cada curso por Q.

   Passo 3: Atribui-se a cada curso o número de vagas na equipa igual à parte inteira do respetivo quociente obtido no passo anterior.

   Passo 4: Caso ainda falte preencher alguma vaga na equipa, procede-se do modo seguinte:

   - divide-se o número de alunos inscritos em cada curso pela soma do número de vagas que já lhe foi atribuído com 1;
   - atribui-se mais uma vaga na equipa ao curso a que corresponder o maior quociente, calculado no ponto anterior.

   Repete-se este passo até que todas as vagas na equipa sejam preenchidas.

   Determine quantos alunos de cada um dos cursos preencheram as vagas na equipa, de acordo com o método acima descrito.

   Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve duas casas decimais.

3. O funcionamento de um jogo de *Sala de Fuga* acarreta diversas despesas, nomeadamente com a eletricidade.

Analisando uma fatura de eletricidade, é possível verificar que o valor a pagar resulta da soma de diversas parcelas. Umas dependem do consumo de eletricidade, medido em quilowatt-hora (kWh), ou do número de dias de consumo, ao passo que outras têm valor fixo.

Admita que o valor a pagar (V), em euros, resulta da aplicação da fórmula de cálculo seguinte:

$$\mathrm{V} = \mathrm{C} + \mathrm{IEC} + \mathrm{PC} + \mathrm{AR} + \mathrm{CA} + \mathrm{TE}$$

Em que:

- C é o consumo, em euros, calculado em função do total de kWh consumidos;
- IEC é o imposto especial de consumo, em euros, calculado em função do total de kWh consumidos;
- PC é a potência contratada, em euros, calculada em função do número total de dias de consumo;
- AR é o acesso às redes, em euros, calculado em função do número total de dias de consumo;
- CA é a contribuição audiovisual, cujo valor final é 3,02 €;
- TE é a taxa de exploração, cujo valor final é 0,09 €.

Sobre algumas das parcelas incide ainda o imposto sobre o valor acrescentado (IVA).

Na Tabela 3, está registado o preço unitário dessas parcelas, sem a aplicação do IVA, e a taxa de IVA que lhes é aplicada, exceto a do consumo (C).

Tabela 3

	Preço (€) sem IVA	IVA (%)
C	0,1476 por kWh	
IEC	0,001 por kWh	23
PC	0,1263 por dia	23
AR	0,0299 por dia	6

Num período de 31 dias, em que foram consumidos 450 kWh, o valor a pagar (V) foi 79,87 €.

Qual é a taxa de IVA aplicada ao consumo (C)?

Apresente a sua resposta em percentagem, arredondada às unidades.

Caso proceda a arredondamentos nos cálculos intermédios, conserve quatro casas decimais.

Item obrigatório

4. Numa das salas de um jogo de *Sala de Fuga*, estava exposto um conjunto de seis cartas, A, B, C, D, E e F. Apresenta-se, a seguir, a lista das seis cartas.

A carta A tem um círculo desenhado e está numerada com o algarismo 1.

A carta B tem um quadrado desenhado e está numerada com o algarismo 1.

A carta C tem um triângulo desenhado e está numerada com o algarismo 1.

A carta D tem um círculo desenhado e está numerada com o algarismo 2.

A carta E tem um triângulo desenhado e está numerada com o algarismo 3.

A carta F tem um quadrado desenhado e está numerada com o algarismo 4.

O conjunto tinha inicialmente sete cartas, não existindo duas cartas com figuras geométricas iguais numeradas com o mesmo algarismo.

A sétima carta desapareceu (carta G).

As sete cartas, as seis apresentadas mais a carta desaparecida, podem ser empilhadas umas sobre as outras, sendo que a carta seguinte terá de ter a mesma figura geométrica ou o mesmo algarismo que a anterior.

Por exemplo, a carta B poderia ser colocada sobre a carta F, porque ambas têm desenhado um quadrado, ou então a carta C poderia ser colocada sobre a carta A, porque ambas têm o algarismo 1.

A carta desaparecida tem um quadrado numerado com um algarismo já utilizado numa das restantes cartas.

Sabendo que as três primeiras cartas do empilhamento são a D, a A e a B, por esta ordem, será que o algarismo presente na sétima carta (carta G) poderá ser o 3?

Na sua resposta, apresente um possível empilhamento das cartas após a carta B.

5. Uma empresa especializada em jogos de *Sala de Fuga* desenvolveu uma aplicação que permite participar num jogo de *Sala de Fuga online*.

De 1 de janeiro de 2016 até 31 de dezembro de 2019, o número aproximado de utilizadores da aplicação, em centenas, é dado pela expressão

$$N(t) = 9{,}4 - 2{,}01 \log_{10}(t+1),$$

em que t representa o número de meses após o dia 1 de janeiro de 2016.

A partir de 1 de janeiro de 2020, o número aproximado de utilizadores da aplicação, em centenas, passa a ser dado pela expressão

$$P(t) = \frac{30}{1 + 4e^{-0{,}2t}},$$

em que t representa o número de meses após o dia 1 de janeiro de 2020.

Item obrigatório

5.1. O modelo P permite estimar para que valor tende o número de utilizadores da aplicação com o passar do tempo.

Qual é esse valor?

a) 300

b) 600

c) 3000

d) 6000

5.2. No decorrer do ano de 2021, houve um momento em que o número de utilizadores da aplicação atingiu o triplo do que existia a 1 de fevereiro de 2016.

Apresente uma equação que lhe permita determinar o momento referido.

Não resolva a equação.

Item obrigatório

5.3. Comparando o número de utilizadores da aplicação a 1 de dezembro de 2016 e o número de utilizadores da aplicação a 1 de janeiro de 2020, verifica-se que diminuiu.

Qual é o valor, aproximado às unidades, dessa diminuição?

a) 100

b) 123

c) 600

d) 723

6. Num determinado jogo de *Sala de Fuga*, registou-se, mensalmente, o número de equipas que nele participaram e, destas, quantas o concluíram e quantas não o concluíram.

6.1. A relação entre as variáveis «número de equipas que participaram neste jogo de *Sala de Fuga*» (x), num determinado mês, e «número de equipas que concluíram o jogo de *Sala de Fuga*» (y), nesse mesmo mês, é bem aproximada por uma regressão linear de y sobre x, definida por $y = 0{,}474x - 3{,}487$.

Num outro mês, participaram neste jogo de *Sala de Fuga* 80 equipas.

Estime o número de equipas que o concluiu nesse mês, com base no modelo de regressão linear.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Item obrigatório

6.2. Na Tabela 4, são apresentados os dados referentes à idade, em anos, organizada nas classes $[18, 28[$, $[28, 38[$, $[38, 48[$, dos capitães das equipas que participaram no jogo de *Sala de Fuga* num determinado mês, divididos em função do facto de a sua equipa ter concluído, ou não, o jogo de *Sala de Fuga*.

Tabela 4

	Concluíram	Não concluíram
$[18, 28[$	6	9
$[28, 38[$	3	15
$[38, 48[$	21	21

Associe a cada classe, apresentada na Coluna **I**, as afirmações da Coluna **II** que lhe correspondem.

Cada um dos números, de 1 a 7, deve ser associado apenas a uma letra, e todos os números devem ser utilizados.

Escreva na folha de respostas cada uma das letras da Coluna I, seguida do(s) número(s) correspondente(s) da Coluna II.

Coluna I

a) $[18, 28[$

b) $[28, 38[$

c) $[38, 48[$

Coluna II

1) Das equipas que concluíram o jogo de *Sala de Fuga*, o número de capitães cuja idade pertence a esta classe é o menor.

2) 56% dos capitães de equipa têm idade pertencente a esta classe.

3) A quinta parte dos capitães das equipas que não concluíram o jogo de *Sala de Fuga* tem idade pertencente a esta classe.

4) É a classe em que é maior a diferença entre o número de capitães das equipas que concluíram o jogo de *Sala de Fuga* e o número de capitães das equipas que não o concluíram.

5) Considerando a totalidade dos capitães das equipas, é a classe modal das suas idades.

6) Considerando a totalidade dos capitães das equipas, é a classe mediana das suas idades.

7) O primeiro quartil das idades dos capitães das equipas que não concluíram o jogo de *Sala de Fuga* pertence a esta classe.

7. Junto das equipas que concluíram o desafio de um jogo de *Sala de Fuga*, foi realizado um estudo estatístico relativo ao tempo, em minutos, que as mesmas demoraram para o concluir.

Na Tabela 5, estão parcialmente registados os dados recolhidos, na qual N representa o número de equipas, fr_i representa a frequência relativa simples, em percentagem, e Fr_i representa a frequência relativa acumulada, em percentagem.

Tabela 5

Tempo	N	fr_i	Fr_i
$]0, 10]$	x		12,5
$]10, 20]$		y	52,5
$]20, 30]$			60
$]30, 40]$	12		70
$]40, 50]$			z
$]50, 60]$		7,5	100

N – Número de equipas

fr_i – Frequência relativa simples (%)

Fr_i – Frequência relativa acumulada (%)

Item obrigatório

7.1. Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A variável estatística em estudo é uma variável ___I___ .

De acordo com a informação disponível na Tabela 5, o valor de y é ___II___ , o valor de z é ___III___ , e o valor de x é ___IV___ .

I

a) qualitativa

b) quantitativa discreta

c) quantitativa contínua

II

a) 20

b) 30

c) 40

III

a) 80

b) 92,5

c) 97,5

IV

a) 15

b) 17

c) 18

7.2. Certo dia, a Joana, uma das funcionárias do jogo de *Sala de Fuga*, tirou uma fotografia a cada uma das equipas que concluiu o desafio num tempo, em minutos, pertencente ao intervalo $]30, 40]$.

Admita que, das equipas fotografadas pela Joana, 25% concluíram o desafio num tempo superior a 35 minutos.

A Joana organizou as fotografias num álbum, colando, ao acaso, uma fotografia em cada página.

Qual é a probabilidade de apenas uma das duas fotografias colocadas nas duas primeiras páginas do álbum ser de uma equipa que terminou o desafio num tempo, em minutos, pertencente ao intervalo $]35, 40]$?

Apresente o resultado na forma de dízima, com arredondamento às centésimas.

Item obrigatório

8. Dos capitães das equipas que, em 2023, participaram num jogo de *Sala de Fuga*, verificou-se que:

- a quarta parte participava pela primeira vez;
- 48% não participavam pela primeira vez e pertenciam a equipas que concluíram o desafio;
- 56% dos que participavam pela primeira vez pertenciam a equipas que concluíram o desafio.

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva na folha de respostas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

Escolheu-se, ao acaso, um capitão de uma equipa que, em 2023, participou num jogo de *Sala de Fuga*.

A probabilidade de esse capitão já ter participado anteriormente num jogo de *Sala de Fuga* era ___I___ .

A percentagem de capitães que participava pela primeira vez num jogo de *Sala de Fuga* e cujas equipas concluíram o desafio foi ___II___ .

A probabilidade de o capitão pertencer a uma equipa que concluiu o desafio, sabendo-se que não participava pela primeira vez num jogo de *Sala de Fuga*, era ___III___ .

Conseguiram concluir o desafio ___IV___ das equipas destes capitães.

I

a) 0,25

b) 0,4

c) 0,75

II

a) 8%

b) 14%

c) 31%

III

a) 0,36

b) 0,48

c) 0,64

IV

a) 62%

b) 75%

c) 91%

9. Durante um determinado período de tempo, realizou-se uma campanha publicitária para divulgar quatro jogos de *Sala de Fuga*, A, B, C e D.

   Após a campanha, com o intuito de saber qual era o preferido, foi selecionado, ao acaso, um conjunto de 900 pessoas de entre as que manifestaram intenção de participar num dos jogos de *Sala de Fuga* divulgados na campanha publicitária. Questionadas sobre o jogo de *Sala de Fuga* preferido, cada uma destas pessoas indicou A, B, C ou D.

   Na Tabela 6, estão registadas as respostas obtidas.

   Tabela 6

	Número de pessoas
A	200
B	250
C	324
D	126

<u>Item obrigatório</u>

9.1. Escolheu-se, ao acaso, uma das pessoas questionadas.

Qual é a probabilidade de a pessoa escolhida ter preferido o jogo de *Sala de Fuga* A, sabendo-se que não indicou nem o C nem o D?

a) $\frac{4}{9}$

b) $\frac{5}{9}$

c) $\frac{1}{5}$

d) $\frac{4}{5}$

9.2. A amplitude de um intervalo de confiança para a proporção populacional relativa às pessoas que preferem o jogo de *Sala de Fuga* C, face ao número total de pessoas que têm intenção de participar num dos jogos de *Sala de Fuga* divulgados na campanha publicitária, é 0,06272.

Identifique o nível de confiança desse intervalo.

Na sua resposta, apresente o valor da proporção amostral.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 9 itens contribuem obrigatoriamente para a classificação final.

1.	....	15 pontos
2.	....	19 pontos
4.	....	19 pontos
5.1.	....	15 pontos
5.3.	....	15 pontos
6.2.	....	15 pontos
7.1.	....	15 pontos
8.	....	15 pontos
9.1.	....	15 pontos

SUBTOTAL .... 143 pontos

Destes 5 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação. (3 x 19 pontos = 57 pontos)

3., 5.2., 6.1., 7.2., 9.2.

SUBTOTAL .... 57 pontos

TOTAL .... 200 pontos

Formulário

Modelos de grafos

Condição necessária e suficiente para que um grafo conexo admita circuitos de Euler

Um grafo conexo admite circuitos de Euler se e só se todos os seus vértices forem de grau par.

Modelos de probabilidade

Teorema da probabilidade total e regra de Bayes

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B}) = P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})$$

$$P(B \mid A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(B) \times P(A \mid B)}{P(B) \times P(A \mid B) + P(\overline{B}) \times P(A \mid \overline{B})}$$

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + P(A \cap B_3) =$$

$$= P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)$$

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)} = \frac{P(B_k) \times P(A \mid B_k)}{P(B_1) \times P(A \mid B_1) + P(B_2) \times P(A \mid B_2) + P(B_3) \times P(A \mid B_3)}$$

podendo k tomar os valores $1, 2$ ou 3

Modelo normal

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Intervalos de confiança

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável normal X, admitindo que se conhece o desvio padrão da variável

$$\left]\overline{x} - z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

σ – desvio padrão da variável

z – valor relacionado com o nível de confiança (*****)

Intervalo de confiança para o valor médio μ de uma variável X, admitindo que se desconhece o desvio padrão da variável e que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\overline{x} - z\frac{s}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + z\frac{s}{\sqrt{n}}\right[$$

n – dimensão da amostra

$\overline{x}$ – média amostral

s – desvio padrão amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*****)

Intervalo de confiança para uma proporção p, admitindo que a amostra tem dimensão superior a 30

$$\left]\, p - z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,,\quad p + z\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \,\right[$$

n – dimensão da amostra

p – proporção amostral

z – valor relacionado com o nível de confiança (*****)

(*****) Valores de z para os níveis de confiança mais usuais

Nível de confiança	z
90%	1,645
95%	1,960
99%	2,576