REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática B

Prova 735 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2025

11.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 12 Páginas

A prova inclui 10 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 4 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, apenas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Sempre que recorrer à calculadora, apresente, consoante a situação, todos os elementos relevantes visualizados, como:

- os gráficos obtidos, em referencial cartesiano, com os pontos relevantes para a resolução assinalados (por exemplo, pontos de intersecção de gráficos, pontos de máximos e pontos de mínimos);
- as linhas da tabela obtida que são relevantes para a resolução;
- as listas que introduziu na calculadora para obter as estatísticas relevantes para a resolução (por exemplo, média, desvio padrão, coeficiente de correlação e declive e ordenada na origem de uma reta de regressão).

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r}{180}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de figuras planas

Losango: $\frac{\textit{Diagonal menor} \times \textit{Diagonal maior}}{2}$

Trapézio: $\frac{\textit{Base menor} + \textit{Base maior}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: $\textit{Semiperímetro} \times \textit{Apótema}$

Sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

ou

$\frac{\alpha \pi r^2}{360}$ (α – amplitude, em graus, do ângulo ao centro; r – raio)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Área lateral de um cilindro reto: $2\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Cilindro: $\textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

1. Galileo Galilei (1564-1642) estudou, na sua época, o movimento de queda dos corpos. A queda de um corpo, na vertical, era muito difícil de cronometrar. Para retardar esse movimento, utilizou calhas assentes em planos inclinados.

Na Figura 1, está esquematizada uma das experiências realizadas por Galileo.

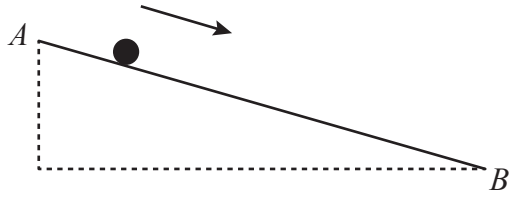

Figura 1

Neste esquema, que não está à escala, $[AB]$ representa a calha por onde uma esfera se desloca, como a seta sugere, desde o ponto A até ao ponto B, sendo $\overline{AB} = 26{,}4$ m.

Considere a função definida por

$$d(t) = 0{,}82t^2$$

em que t é o tempo, em segundos, decorrido desde o instante inicial, instante em que a esfera é largada em A, e $d(t)$ é a distância, em metros, da esfera ao ponto A, no instante t.

*** 1.1.** Determine o tempo que a esfera demora a percorrer a calha, representada por $[AB]$.

Apresente o valor pedido em segundos, arredondado às décimas.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

*** 1.2.** Complete o texto, de acordo com o modelo apresentado, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

«Ao fim de 1 segundo, a esfera percorreu ____**I**____ metros. A taxa de variação instantânea da função d em $t = 3$ é ____**II**____ metros por segundo. Nos primeiros 4 segundos, a esfera percorre o ____**III**____ do espaço que percorre nos primeiros 2 segundos do movimento.»

I	II	III
a) $0{,}41$	**a)** $2{,}46$	**a)** dobro
b) $0{,}82$	**b)** $4{,}92$	**b)** triplo
c) $1{,}64$	**c)** $7{,}38$	**c)** quádruplo

*** 1.3.** Admita que, como se representa no esquema da Figura 2, que não está à escala, a calha foi colocada com uma inclinação de 7° relativamente ao plano horizontal do solo, representado na figura por $[CB]$.

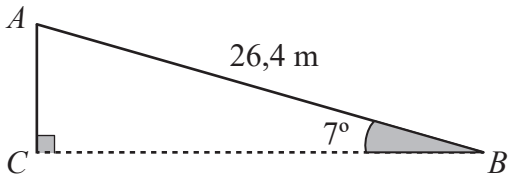

Figura 2

Determine a altura $\overline{AC}$.

Apresente o valor pedido em metros, arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

2. A Figura 3 é uma fotografia do *Castel del Monte*, um castelo mandado construir no século XIII pelo imperador Frederico II, na região italiana da Apúlia, perto da cidade de Bari, onde se acredita ter estado o famoso matemático Leonardo de Pisa (Fibonacci).

Figura 3

Admita que a estrutura do castelo é constituída por uma parte central, com $20{,}5\ \text{m}$ de altura, delimitada, interior e exteriormente, pela superfície lateral de dois prismas octogonais regulares e por oito torres com a forma de prisma octogonal regular, com $24\ \text{m}$ de altura.

Na Figura 4, que não está à escala, apresenta-se um esquema simplificado da base dessa estrutura, construída a partir de oito octógonos regulares, com $3{,}4\ \text{m}$ de lado, e dois octógonos regulares concêntricos, com $7{,}5\ \text{m}$ e $11{,}5\ \text{m}$ de lado, com lados paralelos que distam, aproximadamente, $4{,}8\ \text{m}$. Nesta figura, assinalam-se ainda dois apótemas de dois octógonos, um com, aproximadamente, $4{,}1\ \text{m}$ e outro com, aproximadamente, $9\ \text{m}$.

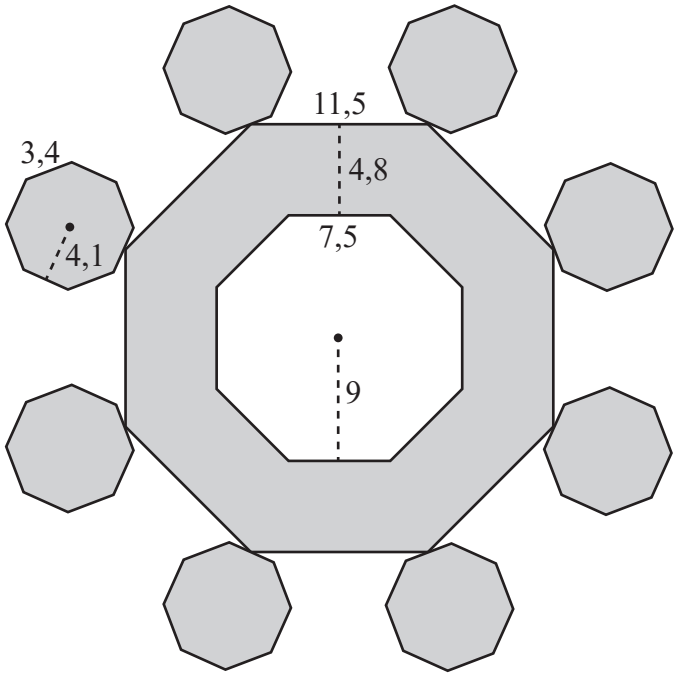

Figura 4

*** 2.1.** Determine o volume da estrutura do castelo, de acordo com os dados apresentados.

Apresente o valor pedido em metros cúbicos, arredondado às unidades.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

*** 2.2.** Num dos oito prismas octogonais regulares com 24 metros de altura, fixa-se um referencial ortogonal e monométrico $Oxyz$, cuja unidade é o metro, tal que a origem do referencial coincide com o centro do prisma e que o eixo Oz intersecta as bases do prisma nos seus centros, como se representa na Figura 5.

Qual das equações seguintes define o plano que contém a base inferior do prisma representado na Figura 5?

(A) $z = -24$ **(B)** $z = -12$

(C) $z = 12$ **(D)** $z = 24$

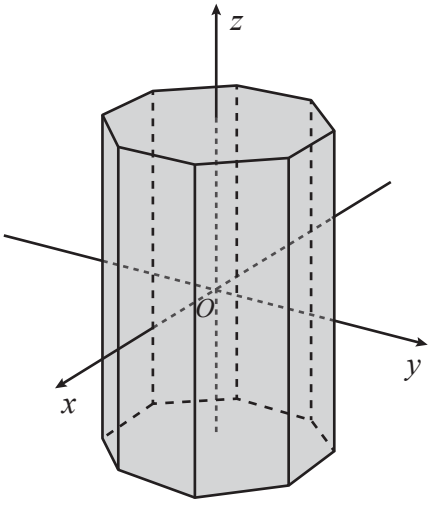

Figura 5

*** 3.** O *Castel del Monte* é classificado como património da Humanidade pela UNESCO. Atualmente, é também um espaço museológico, podendo ser visitado pelo público.

O número de visitas a um museu pode ser influenciado por variáveis como, por exemplo, os gastos em publicidade.

Na Tabela 1, apresentam-se os gastos em publicidade, x, em milhares de euros, em alguns meses, de um determinado museu e o correspondente número aproximado de visitantes, y, em milhares, desse museu, no mesmo mês.

Tabela 1

Gastos em publicidade, em milhares de euros (x)	**Número de visitantes, em milhares** (y)
5	12
6	15
7	18
8	22
9	26
10	30

Admita válido o modelo de regressão linear de y sobre x, obtido a partir dos dados apresentados na tabela.

Estime, com base nesse modelo, o número de visitantes que este museu teria num determinado mês, caso nesse mês os gastos em publicidade fossem de $7{,}4$ milhares de euros.

Na sua resposta, apresente:

– os valores dos parâmetros da equação da reta de regressão linear de y sobre x, arredondados às milésimas;

– o valor pedido em milhares, arredondado às unidades.

✱ 4. Um *drone* sobrevoa o *Castel del Monte* para captação de fotografias.

Seja $f(t)$ a altura do *drone* em relação ao solo, em metros, t minutos após o início do voo, para $0 \leq t \leq 7$.

Sabe-se que, durante os primeiros 3 minutos do voo, a altura do *drone* aumentou e que, nos restantes minutos, a altura se manteve constante.

Seja F a função que dá a taxa de variação instantânea da função f, para cada valor de t.

Na Figura 6, apresentam-se dois gráficos, A e B, em referencial cartesiano ortogonal.

Gráfico A

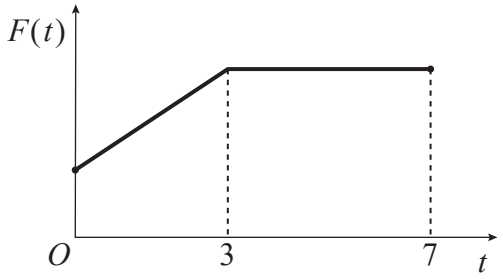

Gráfico B

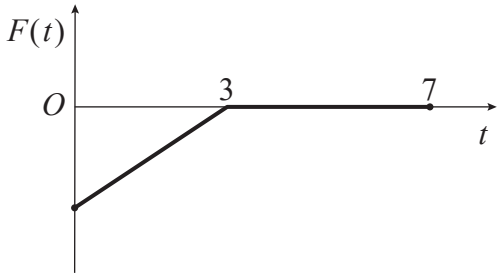

Figura 6

Justifique que nem o Gráfico A nem o Gráfico B podem representar a função F.

Apresente uma justificação para cada um dos gráficos.

5. Uma orquestra realizou o concerto comemorativo do aniversário de um museu.

*** 5.1.** Os bilhetes para o concerto esgotaram, e o preço de cada tipo de bilhete variava de acordo com o lugar no recinto.

A Tabela 2 é referente ao preço, em euros, de cada tipo de bilhete e à respetiva percentagem de bilhetes vendidos.

Tabela 2

Preço (euros)	**Percentagem de bilhetes vendidos**
6	18
10	24
12	32
15	26

Complete o texto, de acordo com o modelo apresentado, selecionando a opção correta para cada espaço.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II** e **III**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada.

«Relativamente ao preço dos bilhetes vendidos, a moda é _____**I**_____ euros, a mediana é _____**II**_____ euros, e a média é _____**III**_____ euros.»

I	**II**	**III**
a) 12	**a)** 11	**a)** 10,75
b) 15	**b)** 12	**b)** 11,22
c) 32	**c)** 28	**c)** 26,09

*** 5.2.** Alguns minutos antes do início do concerto, estavam 600 espectadores no recinto, 70% dos quais eram adultos.

Desde esse instante e até ao início do concerto, entraram mais espectadores no recinto, todos adultos, e ninguém saiu do recinto.

Considere que é sorteado um dos espectadores presentes no recinto, no início do concerto.

Sabe-se que a probabilidade de o espectador sorteado ser um adulto é igual a $0{,}76$.

Determine o número de espectadores que estavam no recinto no início do concerto.

6. Num documento do Instituto dos Museus e da Conservação, refere-se que um dos fatores que influencia a conservação dos artefactos é a humidade relativa do ar.

A Figura 7 é uma imagem de um capacete de bronze pertencente ao Museu de Lagos.

Figura 7

Admita que a humidade relativa, $g(t)$, em percentagem, do ar, em função do tempo, t, em horas, na sala onde se encontra exposto o capacete, entre as 0 horas e as 24 horas de um determinado dia, é dada por

$$g(t) = -0{,}003t^3 + 0{,}12t^2 - 1{,}16t + 31, \text{ com } 0 \leq t \leq 24$$

* **6.1.** Qual dos valores seguintes corresponde à percentagem mínima de humidade relativa, arredondada às unidades, naquele dia, na sala onde se encontra exposto o capacete, de acordo com o modelo apresentado?

(A) 0% **(B)** 6% **(C)** 28% **(D)** 31%

6.2. Para uma boa conservação dos objetos metálicos, estes devem estar em ambientes com humidade relativa inferior a 30%.

Determine, de acordo com o modelo apresentado, durante quanto tempo é que esta condição **não** foi respeitada, naquele dia, na sala onde se encontra exposto o capacete.

Apresente o resultado em horas e minutos, com os minutos arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, utilize valores arredondados às milésimas.

7. Muitos artistas, conhecidos pelas suas obras de arte abstrata, utilizam a matemática nas suas criações. Na Figura 8, que não está à escala, reproduz-se o vitral *Dans I*, do artista Theo van Doesburg, de 1917, que se encontra exposto no Museu Kröller-Müller, nos Países Baixos. No seu tamanho original, este vitral tem a forma de um retângulo, com $37{,}4\ \text{cm}$ por $57{,}4\ \text{cm}$.

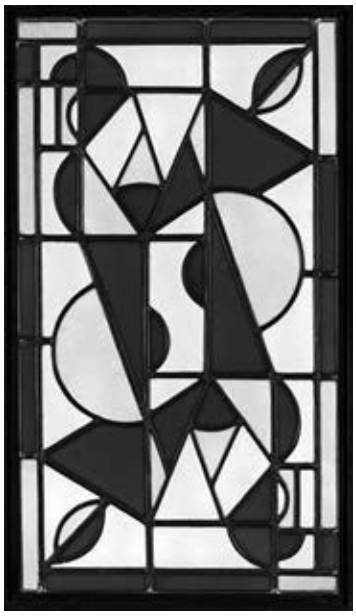

Figura 8

Na loja do museu, os visitantes podem adquirir reproduções do vitral *Dans I*. Existem reproduções do vitral com diferentes dimensões, mas todas são semelhantes ao original. Uma dessas reproduções tem $614\ \text{cm}^2$ de área.

Determine o comprimento e a largura dessa reprodução do vitral.

Apresente os valores pedidos em centímetros, arredondados às unidades.

Em cálculos intermédios, se proceder a arredondamentos, conserve duas casas decimais.

8. Numa turma, aquando da eleição do delegado de turma, concorreram três alunos: o António (A), o Bruno (B) e a Carla (C).

Cada aluno da turma escreveu no boletim de voto os nomes dos três colegas concorrentes, por ordem de preferência.

O resultado da contagem dos votos apresenta-se na Tabela 3.

Tabela 3

N.º de votos / Preferências	**5**	**6**	**4**	**9**
1.ª preferência	A	A	C	B
2.ª preferência	B	C	A	C
3.ª preferência	C	B	B	A

Para se apurar o vencedor, aplica-se o método a seguir descrito.

– São atribuídos pontos a cada um dos concorrentes, em função do seu lugar na ordem de preferências. Cada concorrente recebe:

  • 4 pontos por cada voto na 1.ª preferência;

  • 2 pontos por cada voto na 2.ª preferência;

  • 1 ponto por cada voto na 3.ª preferência.

– Determina-se, para cada concorrente, a soma dos pontos obtidos.

– Declara-se vencedor o concorrente que obtém mais pontos.

Determine o vencedor desta eleição, de acordo com o método descrito.

9. O *floco de neve de Koch* é uma composição geométrica que se pode obter em várias etapas, a partir de um triângulo equilátero inicial, de modo que, em cada etapa, a partir da segunda, se obtém um polígono cujo perímetro é $\frac{4}{3}$ do perímetro do polígono obtido na etapa anterior.

Na Figura 9, apresentam-se as cinco primeiras etapas da construção de um *floco de neve de Koch*, considerando-se, na primeira etapa, um triângulo equilátero de lado 1.

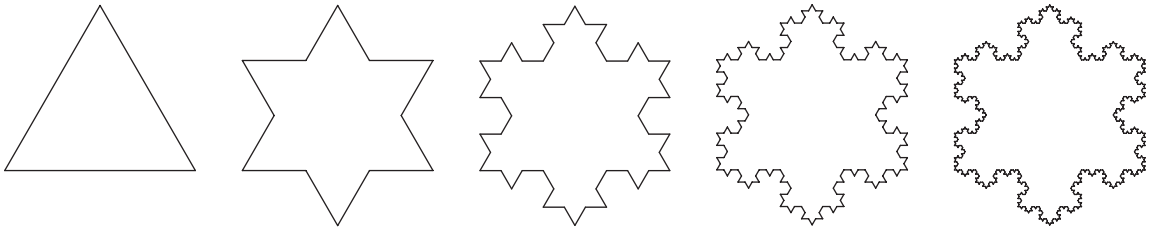

Figura 9

Determine o perímetro do polígono obtido na oitava etapa.

Apresente o valor pedido arredondado às décimas.

Em cálculos intermédios, não proceda a arredondamentos.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 10 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	18	14	18	18	14	18	18	14	18	14	**164**
Destes 4 itens, contribuem para a classificação final da prova os 2 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**6.2.**	**7.**	**8.**	**9.**							**Subtotal**
Cotação (em pontos)	2 × 18 pontos										**36**
TOTAL											**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 735

1.ª Fase