Prova Escrita de Matemática A

12.º ano de Escolaridade

Prova 635/1.ª Fase 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos

2008

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique de forma legível a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, desenhos ou outras representações, que podem ser primeiramente elaboradas a lápis, sendo, a seguir, passadas a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica sempre que necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos grupos e/ou dos itens, bem como as respectivas respostas.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de **escolha múltipla**, escreva, na folha de respostas,

- o **número** do item;
- a **letra identificativa** da alternativa correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

Nos itens de resposta aberta com cotação igual ou superior a 15 pontos e que impliquem a produção de um texto, o domínio da comunicação escrita em língua portuguesa representa cerca de 10% da cotação.

As cotações dos itens encontram-se na página 12.

A prova inclui um Formulário na página 4.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r – *raio da base;* g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3} \pi r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}, \ k \in \{0, ..., n-1\}$

Probabilidades

$\mu = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n$

$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \cdots + (x_n - \mu)^2 p_n}$

Se X é N(μ, σ), então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approxeq 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approxeq 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approxeq 0,9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u) = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

- Os oito itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais só uma está correcta.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.

1. O João e a Maria convidaram três amigos para irem, com eles, ao cinema. Compraram cinco bilhetes com numeração seguida, numa determinada fila, e distribuíram-nos ao acaso.

Qual é a probabilidade de o João e a Maria ficarem sentados um ao lado do outro?

(A) $\frac{1}{5}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $\frac{3}{5}$ **(D)** $\frac{4}{5}$

2. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega \text{ e } B \subset \Omega)$. Sabe-se que:

- $P(A \cup B) = 80\%$
- $P(B) = 60\%$
- $P(A \cap B) = 10\%$

Qual é o valor de $P(A)$?

(P designa probabilidade).

(A) 10% **(B)** 20% **(C)** 30% **(D)** 40%

3. Admita que a variável peso, expressa em gramas, das maçãs de um pomar é bem modelada por uma distribuição normal N $(60;\,5)$, em que 60 é o valor médio e 5 é o valor do desvio-padrão da distribuição.

Retira-se, ao acaso, uma dessas maçãs.

Considere os acontecimentos:

A : «o peso da maçã retirada é superior a 66 gramas»

B : «o peso da maçã retirada é inferior a 48 gramas»

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $P(\mathrm{A}) = P(\mathrm{B})$ **(B)** $P(\mathrm{A}) < P(\mathrm{B})$

(C) $P(\mathrm{B}) < P(\mathrm{A})$ **(D)** $P(\mathrm{A}) + P(\mathrm{B}) = 1$

4. Seja a um número real maior do que $1.$

Qual dos seguintes valores é igual a $2\log_a\left(a^{\frac{1}{3}}\right)$?

(A) $-\dfrac{2}{3}$ **(B)** $-\dfrac{1}{3}$ **(C)** $\dfrac{1}{3}$ **(D)** $\dfrac{2}{3}$

5. Na figura 1, está representada parte do gráfico de uma função f de domínio $]-\infty, 2[$.

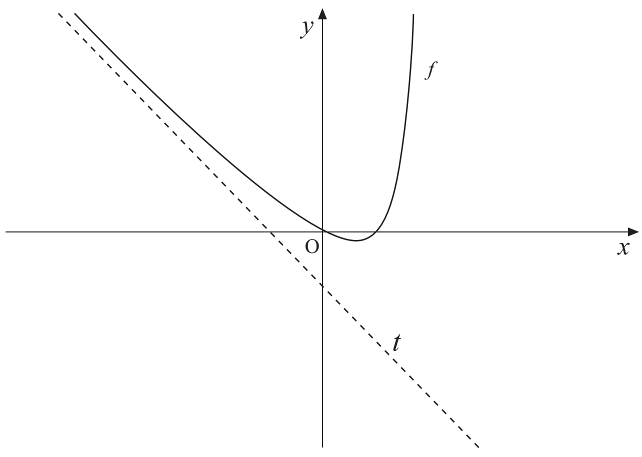


Fig. 1

A recta t, de equação $y = -x - 1$, é assimptota do gráfico de f quando x tende para $-\infty$.

Qual é o valor do $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) + x + 1\big)$?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

6. A figura 2 representa parte do gráfico de uma função f de domínio $\mathbb{R}$.

Em qual das figuras seguintes pode estar parte da representação gráfica de f', derivada de f?

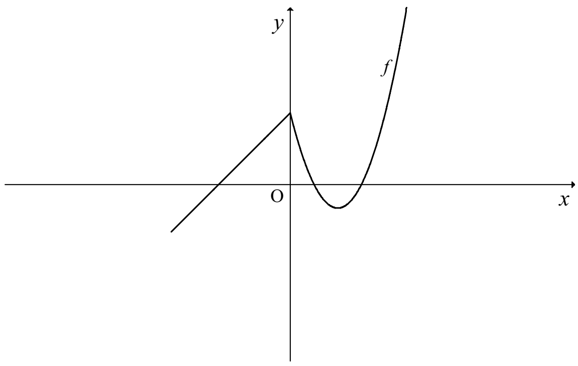
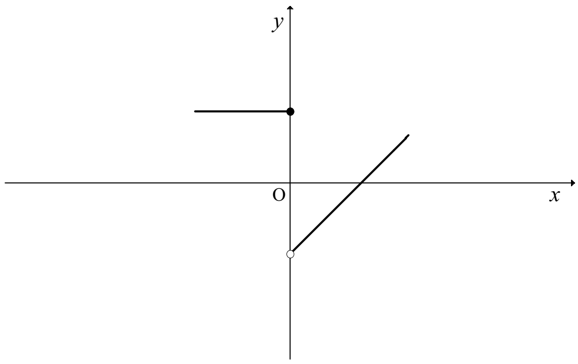
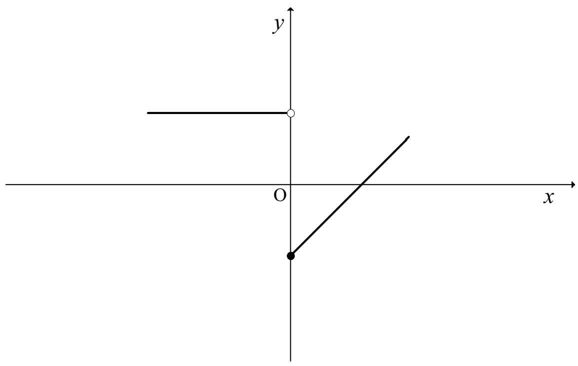


Fig. 2

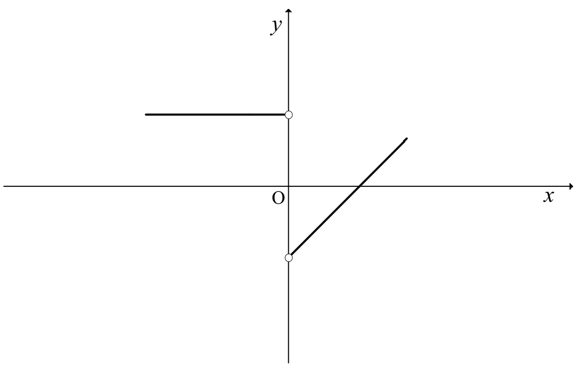
(A)



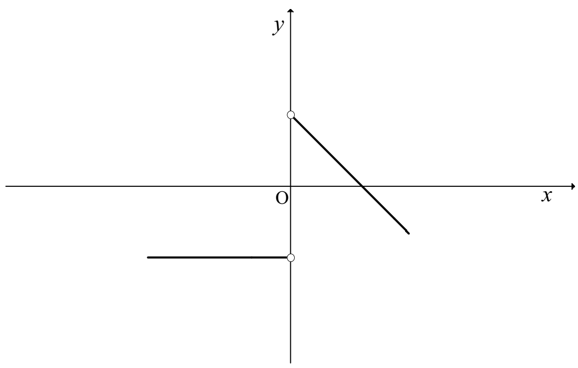
(B)



(C)



(D)



7. Seja $z = 3i$ um número complexo.

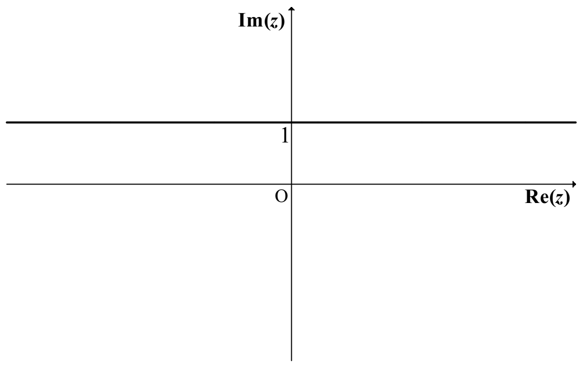
Qual dos seguintes valores é um argumento de z?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{2}\pi$ **(C)** π **(D)** $\frac{3}{2}\pi$

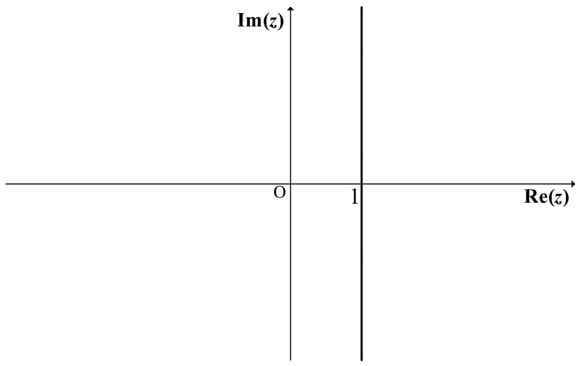
8. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $z+\overline{z}=2$.

Em qual das figuras seguintes pode estar representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por esta condição?

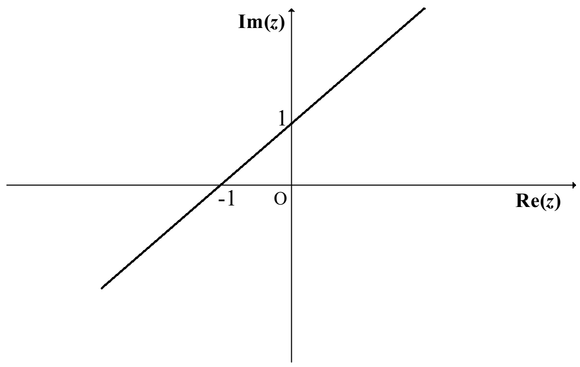
(A)



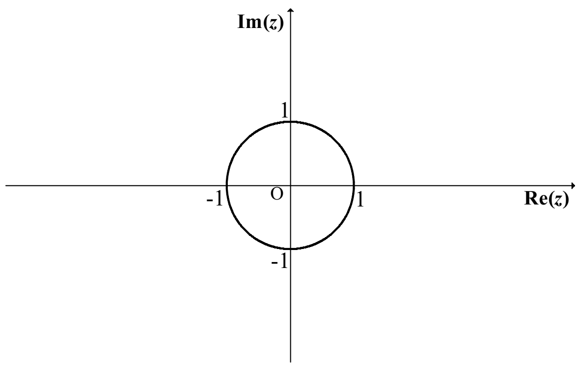
(B)



(C)



(D)



GRUPO II

Na resposta a itens deste grupo, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = 1 - \sqrt{3}\, i$ e $z_2 = 8 \operatorname{cis} 0$

(i designa a unidade imaginária).

1.1. Mostre, **sem recorrer à calculadora**, que $(-z_1)$ é uma raiz cúbica de z_2.

1.2. No plano complexo, sejam A e B as imagens geométricas de z_1 e de $z_3 = z_1 .\, i^{46}$, respectivamente.

Determine o comprimento do segmento $[AB]$.

2. Uma turma do 12.º ano de uma Escola Secundária está a organizar uma viagem de finalistas.

2.1. Os alunos da turma decidiram vender rifas, para angariarem fundos para a viagem.
A numeração das rifas é uma sequência de três algarismos (como, por exemplo, 099), iniciando-se em 000.
De entre as rifas, que foram todas vendidas, será sorteada uma, para atribuir um prémio.

Qual é a probabilidade de a rifa premiada ter um único algarismo cinco?

Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às centésimas.

2.2. A turma é constituída por doze raparigas e dez rapazes, que pretendem formar uma comissão organizadora da viagem. Sabe-se que a comissão terá obrigatoriamente três raparigas e dois rapazes. A Ana e o Miguel, alunos da turma, não querem fazer parte da comissão em simultâneo.
Explique, numa composição, que o número de comissões diferentes que se pode formar é dado por:

$$^{12}C_3 \times {}^{10}C_2 - {}^{11}C_2 \times 9$$

3. Em duas caixas, A e B, introduziram-se bolas indistinguíveis ao tacto:

- na caixa A: algumas bolas verdes e algumas bolas azuis;
- na caixa B: três bolas verdes e quatro azuis.

Retira-se, ao acaso, uma bola da caixa A e coloca-se na caixa B. De seguida, retira-se, também ao acaso, uma bola da caixa B.

Sabendo que a probabilidade de a bola retirada da caixa B ser azul é igual a $\frac{1}{2}$, mostre que a bola que foi retirada da caixa A e colocada na caixa B tinha cor verde.

4. Seja f a função de domínio $\left[-\pi, +\infty\right[$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-4x+1} & \text{se } x \geq 0 \\ \dfrac{3\operatorname{sen}(x)}{x^2} & \text{se } -\pi \leq x < 0 \end{cases}$$

Estude a função f quanto à existência de assimptotas do seu gráfico, paralelas aos eixos coordenados, escrevendo as suas equações, caso existam.

5. Considere, num referencial ortonormado xOy, os gráficos das funções f e g, de domínio $[0, 3]$, definidas por $f(x) = \ln(x+2)$ e $g(x) = e - e^{x-1}$

($\ln$ designa logaritmo de base e).

Determine a **área de um triângulo $[OAB]$**, com aproximação às décimas, **recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora**.

Para construir o triângulo $[OAB]$, percorra os seguintes passos:

- visualize as curvas representativas dos gráficos das duas funções, **no domínio indicado**;
- reproduza, na sua folha de respostas, o referencial e as curvas visualizadas na calculadora;
- assinale, ainda:
  - a origem O do referencial;
  - o ponto A de intersecção do gráfico das duas funções, indicando as suas coordenadas, com aproximação às décimas;
  - o ponto B de intersecção do gráfico da função g com o eixo Ox.

6. Seja h a função de domínio $]-1, +\infty[$, definida por $h(x) = 4 - x + \ln(x+1)$

$(\ln$ designa logaritmo de base $e)$.

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use, pelo menos, duas casas decimais.

6.1. Estude a função h, quanto à monotonia, no seu domínio.

Indique os intervalos de monotonia e, se existir algum extremo relativo, determine-o.

6.2. Justifique, aplicando o **Teorema de Bolzano**, que a função h tem, pelo menos, um zero no intervalo $]5, 6[$.

7. Num determinado dia, um grupo de amigos decidiu formar uma associação desportiva.
Admita que, t dias após a constituição da associação, o número de sócios é dado, aproximadamente, por:

$$N(t) = \frac{2000}{1 + 199e^{-0{,}01\,t}} \ , \quad t \geq 0$$

Resolva, **usando métodos analíticos**, os dois itens seguintes.

Nota:

A calculadora pode ser utilizada em eventuais cálculos intermédios; sempre que proceder a arredondamentos, use aproximações às milésimas.

7.1. Determine $N(0)$ e $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t)$.

Interprete os valores obtidos, no contexto do problema.

7.2. Ao fim de quantos dias se comemorou a inscrição do sócio número 1000?

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I	(8 × 5 pontos)		**40 pontos**
GRUPO II			**160 pontos**
1.		30 pontos	
1.1.	15 pontos		
1.2.	15 pontos		
2.		30 pontos	
2.1.	15 pontos		
2.2.	15 pontos		
3.		15 pontos	
4.		15 pontos	
5.		15 pontos	
6.		30 pontos	
6.1.	15 pontos		
6.2.	15 pontos		
7.		25 pontos	
7.1.	10 pontos		
7.2.	15 pontos		
TOTAL			**200 pontos**