Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Prova 635/2.ª Fase 12 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2010

VERSÃO 1

Na folha de respostas, indique, de forma legível, a versão da prova.

A ausência dessa indicação implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens do Grupo I.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta, excepto nas respostas que impliquem a elaboração de construções, de desenhos ou de outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, sendo, a seguir, passados a tinta.

Utilize a régua, o compasso, o esquadro, o transferidor e a calculadora gráfica, sempre que for necessário.

Não é permitido o uso de corrector. Em caso de engano, deve riscar, de forma inequívoca, aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva, de forma legível, a numeração dos grupos e dos itens, bem como as respectivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

Para responder aos itens de escolha múltipla, escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção correcta.

Não apresente cálculos, nem justificações.

A prova inclui, na página 4, um Formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

$\alpha\, r$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Sector circular: $\dfrac{\alpha\, r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$
(r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\, \pi\, r^2$
(r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Cone: $\dfrac{1}{3} \times \textit{Área da base} \times \textit{Altura}$

Esfera: $\dfrac{4}{3}\, \pi\, r^3$
(r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cdot \cos b + \operatorname{sen} b \cdot \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \cdot \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \dfrac{\theta + 2k\pi}{n},\ k \in \{0, \dots, n-1\}$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cdot \cos u$

$(\cos u)' = -\, u' \cdot \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' \cdot e^u$

$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correcta.

Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção seleccionada.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Uma caixa contém bolas indistinguíveis ao tacto e de duas cores diferentes: azul e roxo.

Sabe-se que:

- o número de bolas azuis é 8
- extraindo-se, ao acaso, uma bola da caixa, a probabilidade de ela ser azul é igual a $\frac{1}{2}$

Quantas bolas roxas há na caixa?

(A) 16 **(B)** 12 **(C)** 8 **(D)** 4

2. Considere todos os números de cinco algarismos que se podem formar com os algarismos $5, 6, 7, 8$ e $9.$

De entre estes números, quantos têm, exactamente, três algarismos 5?

(A) ${}^5C_3 \times {}^4A_2$ **(B)** ${}^5C_3 \times 4^2$ **(C)** ${}^5A_3 \times 4^2$ **(D)** ${}^5A_3 \times {}^4C_2$

3. Na sequência seguinte, reproduzem-se os três primeiros elementos e os três últimos elementos de uma linha do Triângulo de Pascal.

$$1 \quad 15 \quad 105 \quad \ldots \quad 105 \quad 15 \quad 1$$

São escolhidos, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Qual é a probabilidade de a soma desses dois elementos ser igual a 105?

(A) 1 **(B)** $\frac{1}{60}$ **(C)** $\frac{1}{120}$ **(D)** 0

4. De uma função h, de domínio $\mathbb{R}$, sabe-se que:

- h é uma função par;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} (h(x) - 2x) = 0$

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x)$?

(A) $+\infty$ **(B)** -2 **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

5. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x \leq 0 \\ \ln x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{1}{n}$

Qual é o valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** 0 **(D)** $-\infty$

6. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função f', primeira derivada de f

Seja $a \in \mathbb{R}^+$ um ponto do domínio de f, tal que $f'(a) = 0$

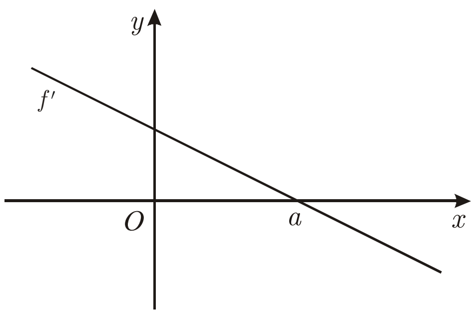

Figura 1

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A função f tem um mínimo para $x = a$

(B) A função f tem um ponto de inflexão para $x = a$

(C) A função f é crescente em $]0, a[$

(D) A função f é decrescente em $\mathbb{R}$

7. A Figura 2 representa um pentágono $[ABCDE]$ no plano complexo.

Os vértices do pentágono são as imagens geométricas das raízes de índice n de um número complexo w

O vértice A tem coordenadas $(1,\ 0)$

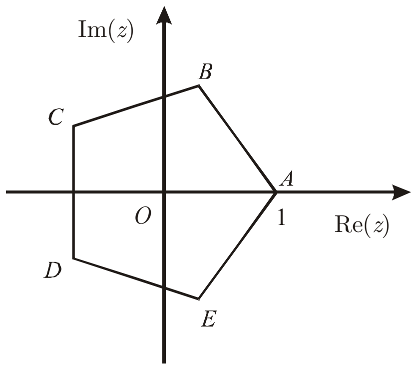

Figura 2

Qual dos números complexos seguintes tem por imagem geométrica o vértice D do pentágono?

(A) $5 \operatorname{cis}\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$ **(B)** $\operatorname{cis}\left(\dfrac{6\pi}{5}\right)$ **(C)** $\operatorname{cis}\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)$ **(D)** $\operatorname{cis}\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

8. Seja w o número complexo cuja imagem geométrica está representada na Figura 3.

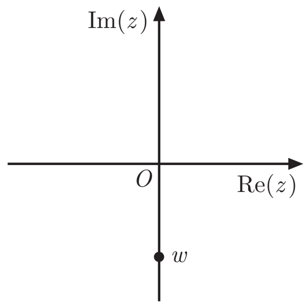

Figura 3

A qual das rectas seguintes pertence a imagem geométrica de w^6 ?

(A) Eixo real

(B) Eixo imaginário

(C) Bissectriz dos quadrantes ímpares

(D) Bissectriz dos quadrantes pares

GRUPO II

Nas respostas aos itens deste grupo, apresente **todos os cálculos** que tiver de efectuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o **valor exacto**.

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z_1 = \sqrt{2}\ \operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)$ e $z_2 = 3$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

1.1. Determine o número complexo $w = \frac{{z_1}^4 + 4i}{i}$

Apresente o resultado na forma trigonométrica.

1.2. Escreva uma condição, em $\mathbb{C}$, que defina, no plano complexo, a circunferência que tem centro na imagem geométrica de z_2 e que passa na imagem geométrica de z_1

2. A Figura 4 e a Figura 5 representam, respectivamente, as planificações de dois dados cúbicos equilibrados, A e B.

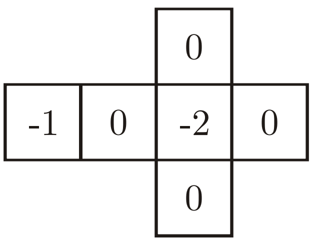

Figura 4

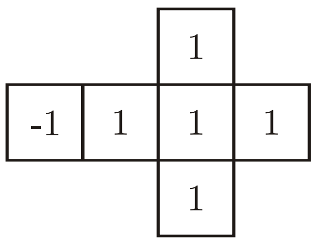

Figura 5

Lançam-se, simultaneamente, os dois dados.

2.1. Seja X a variável aleatória «soma dos números saídos nas faces voltadas para cima, em cada um dos dados».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fracção.

2.2. Considere que o número da face voltada para cima no dado A (Figura 4) é a abcissa de um ponto Q do referencial o.n. xOy, e que o número da face voltada para cima no dado B (Figura 5) é a ordenada desse ponto Q.

Considere agora os acontecimentos:

J: «o número saído no dado A é negativo»;

L: «o ponto Q pertence ao terceiro quadrante».

Indique o valor de $P(L \mid J)$, sem aplicar a fórmula da probabilidade condicionada.

Apresente o resultado na forma de fracção.

Numa composição, explique o seu raciocínio, começando por referir o significado de $P(L \mid J)$ no contexto da situação descrita.

3. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos tais que $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ e $P(B) \neq 0$

Mostre que $\dfrac{P(A \cup B)}{P(B)} - P(\overline{A} \mid B) = \dfrac{P(A)}{P(B)}$

(P designa probabilidade; $\overline{A}$ designa o acontecimento contrário de A; $P(\overline{A} \mid B)$ designa a probabilidade de $\overline{A}$, dado B)

4. Considere a função f, de domínio $]0, +\infty[$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 3x}{x} & \text{se } 0 < x \leq 2 \\ \\ \dfrac{1}{5}x - \ln x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.**, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assimptotas oblíquas.

4.2. Mostre que a função f tem um extremo relativo no intervalo $]2, +\infty[$

4.3. Determine a área do triângulo $[ABC]$, recorrendo às capacidades gráficas da sua calculadora.

Sabe-se que:

- A, B e C são pontos do gráfico da função f
- A e B são os pontos cujas abcissas são as soluções, no intervalo $]0, 2]$, da equação $f(x) = f(15)$
- C é o ponto cuja ordenada é o mínimo da função f, no intervalo $]0, 2]$, e cuja abcissa pertence ao intervalo $]0, 2]$

Na sua resposta, deve:

- reproduzir o gráfico da função, ou os gráficos das funções, que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial;
- indicar as coordenadas dos pontos A, B e C, com arredondamento às centésimas;
- apresentar o resultado pedido, com arredondamento às décimas.

5. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x + e^{2x^3-1}$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

5.1. Mostre que $f(x) = 1{,}5$ tem, pelo menos, uma solução em $]-2, -1[$

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais.

5.2. Determine a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa $x = 0$

6. Um depósito de combustível tem a forma de uma esfera.

A Figura 6 e a Figura 7 representam dois cortes do mesmo depósito, com alturas de combustível distintas.

Os cortes são feitos por um plano vertical que passa pelo centro da esfera.

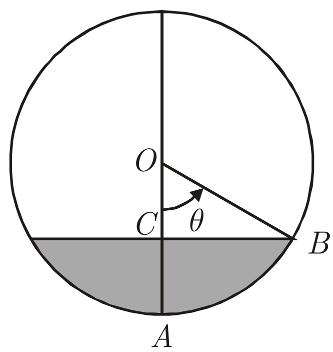

Figura 6

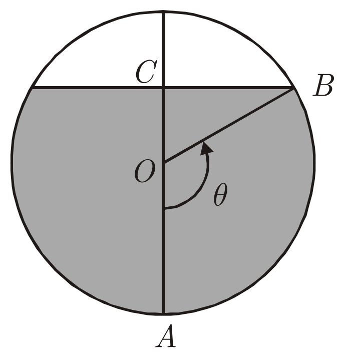

Figura 7

Sabe-se que:

- o ponto O é o centro da esfera;
- a esfera tem 6 metros de diâmetro;
- a amplitude θ, em radianos, do arco AB é igual à amplitude do ângulo ao centro AOB correspondente.

A altura $\overline{AC}$, em metros, do combustível existente no depósito é dada, em função de θ, por h, de domínio $[0, \pi]$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

6.1. Mostre que $h(\theta) = 3 - 3\cos(\theta)$, para qualquer $\theta \in]0, \pi[$

6.2. Resolva a condição $h(\theta) = 3, \quad \theta \in]0, \pi[$

Interprete o resultado obtido no contexto da situação apresentada.

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

	(8 × 5 pontos)	**40 pontos**

GRUPO II

1.		
	1.1.	15 pontos
	1.2.	15 pontos
2.		
	2.1.	15 pontos
	2.2.	15 pontos
3.		15 pontos
4.		
	4.1.	10 pontos
	4.2.	10 pontos
	4.3.	15 pontos
5.		
	5.1.	15 pontos
	5.2.	10 pontos
6.		
	6.1.	15 pontos
	6.2.	10 pontos
		160 pontos

TOTAL	**200 pontos**