GOVERNO DE PORTUGAL | MINISTÉRIO DA EDUCAÇÃO E CIÊNCIA

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

Prova Escrita de Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Prova 635/2.ª Fase

15 Páginas

Duração da Prova: 150 minutos. Tolerância: 30 minutos.

2014

VERSÃO 1

Página em branco

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta, exceto nas respostas que impliquem construções, desenhos ou outras representações, que podem ser, primeiramente, elaborados a lápis, e, a seguir, passados a tinta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Deve riscar aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Página em branco

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de figuras planas

Losango: $\dfrac{\textit{Diagonal maior} \times \textit{Diagonal menor}}{2}$

Trapézio: $\dfrac{\textit{Base maior} + \textit{Base menor}}{2} \times \textit{Altura}$

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Sector circular:

$\dfrac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;* r – *raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\dfrac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \dfrac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\dfrac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

GRUPO I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$.

Sabe-se que:

- A e B são acontecimentos independentes;
- $P(A) = 0{,}4$
- $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}48$

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}08$ **(B)** $0{,}12$ **(C)** $0{,}2$ **(D)** $0{,}6$

2. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro $[ABCDEF]$, cujos vértices pertencem aos eixos coordenados.

Escolhem-se, ao acaso, três vértices desse octaedro.

Qual é a probabilidade de esses três vértices definirem um plano paralelo ao plano de equação $z = 5$?

(A) $\frac{1}{{}^6C_3}$

(B) $\frac{4}{{}^6C_3}$

(C) $\frac{8}{{}^6C_3}$

(D) $\frac{12}{{}^6C_3}$

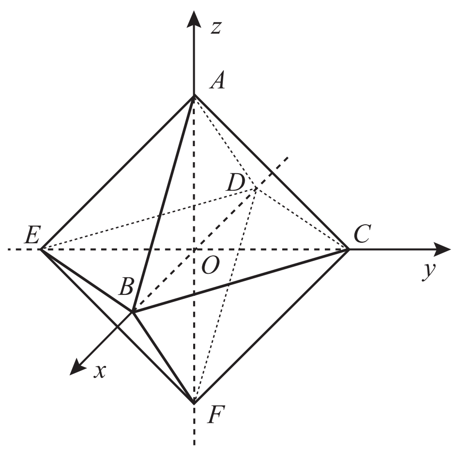


Figura 1

3. Um dos termos do desenvolvimento de $\left(\frac{2}{x}+x\right)^{10}$, com $x \neq 0$, não depende da variável x

Qual é esse termo?

(A) $10\,240$

(B) 8064

(C) 1024

(D) 252

4. Seja g uma função, de domínio $]-\infty, e[$, definida por $g(x)=\ln(e-x)$

Considere a sucessão estritamente crescente de termo geral $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

Qual é o valor de $\lim g(x_n)$?

(A) $+\infty$

(B) e

(C) 1

(D) $-\infty$

5. Considere, para um certo número real k, a função f, contínua em $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}} & \text{se } \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ k-3 & \text{se } x=\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 4

6. Na Figura 2, está representada, num referencial ortogonal xOy, parte do gráfico da função g'', segunda derivada de uma função g

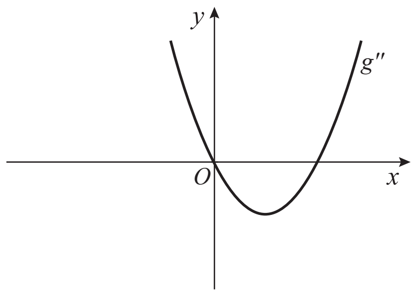
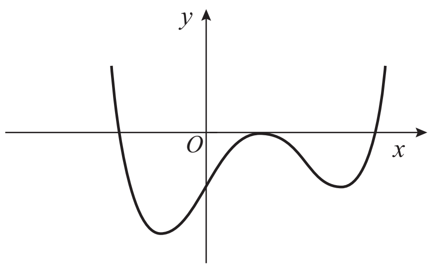


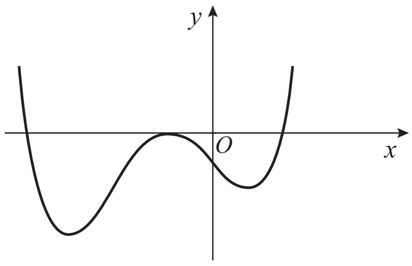
Figura 2

Em qual das opções seguintes pode estar representada parte do gráfico da função g?

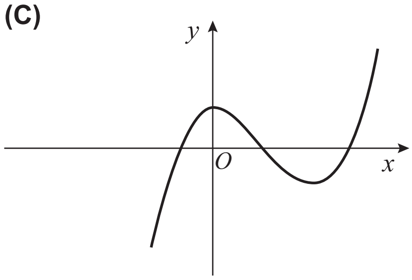
(A)



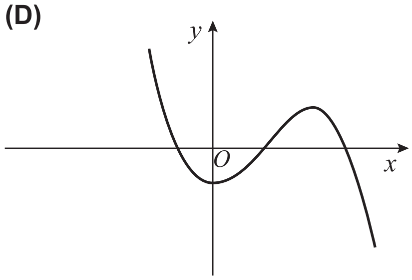
(B)



(C)



(D)



7. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto A, de coordenadas $(1, 0, 3)$, e o plano α, definido por $3x+2y-4=0$

Seja β um plano perpendicular ao plano α e que passa pelo ponto A

Qual das condições seguintes pode definir o plano β ?

(A) $3x+2y-3=0$

(B) $2x-3y-z+1=0$

(C) $2x-3y+z=0$

(D) $3x+2y=0$

8. Na Figura 3, estão representadas, no plano complexo, duas semirretas $\dot{O}A$ e $\dot{O}B$ e uma circunferência de centro C e raio $\overline{BC}$

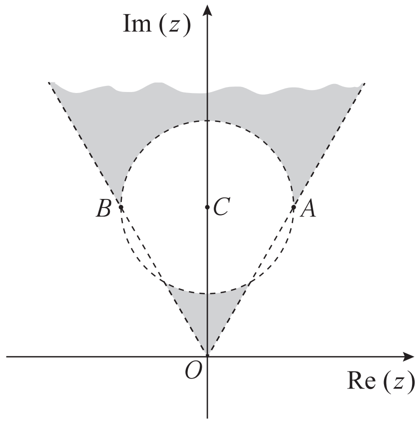


Figura 3

Sabe-se que:

- O é a origem do referencial;
- o ponto A é a imagem geométrica do complexo $\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i$
- o ponto B é a imagem geométrica do complexo $-\frac{2\sqrt{3}}{3}+2i$
- o ponto C é a imagem geométrica do complexo $2i$

Considere como $\arg(z)$ a determinação que pertence ao intervalo $[-\pi, \pi[$

Qual das condições seguintes define a região sombreada, excluindo a fronteira?

(A) $|z-2i|<\frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{4}<\arg(z)<\frac{3\pi}{4}$

(B) $|z-2i|<\frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{3}<\arg(z)<\frac{2\pi}{3}$

(C) $|z-2i|>\frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{3}<\arg(z)<\frac{2\pi}{3}$

(D) $|z-2i|>\frac{2\sqrt{3}}{3} \wedge \frac{\pi}{4}<\arg(z)<\frac{3\pi}{4}$

Página em branco

GRUPO II

Na resposta aos itens deste grupo, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja $\mathbb{C}$ o conjunto dos números complexos.

1.1. Considere $z = 2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e $w = \frac{(z-i)^4}{1+zi}$

No plano complexo, seja O a origem do referencial.

Seja A a imagem geométrica do número complexo $\overline{z}$ e seja B a imagem geométrica do número complexo w

Determine a área do triângulo $[AOB]$, sem utilizar a calculadora.

1.2. Seja $\alpha \in \left]0, \pi\right[$

Resolva, em $\mathbb{C}$, a equação $z^2 - 2\cos\alpha\, z + 1 = 0$

Apresente as soluções, em função de α, na forma trigonométrica.

2. Uma caixa tem seis bolas distinguíveis apenas pela cor: duas azuis e quatro pretas.

2.1. Considere a experiência aleatória que consiste em retirar, ao acaso, uma a uma, sucessivamente e sem reposição, todas as bolas da caixa. À medida que são retiradas da caixa, as bolas são colocadas lado a lado, da esquerda para a direita.

Determine a probabilidade de as duas bolas azuis ficarem uma ao lado da outra.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2.2. Considere a caixa com a sua composição inicial.

Considere agora a experiência aleatória que consiste em retirar dessa caixa, simultaneamente e ao acaso, três bolas.

Seja X a variável aleatória «número de bolas azuis que existem no conjunto das três bolas retiradas».

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável X

Apresente as probabilidades na forma de fração.

3. Na Figura 4, está representado um pentágono regular $[ABCDE]$

Sabe-se que $\overline{AB} = 1$

Mostre que $\dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\| \overrightarrow{AD} \|} = 1 - 2 \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$

Nota: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$ designa o produto escalar do vetor $\overrightarrow{AB}$ pelo vetor $\overrightarrow{AD}$

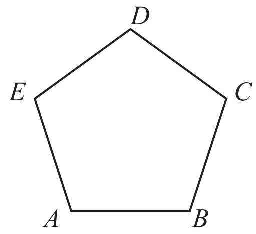


Figura 4

4. Considere as funções f e g, de domínio $]-\infty, 0[$, definidas por

$$f(x) = x - 1 + \frac{\ln(-x)}{x} \quad \text{e} \quad g(x) = -x + f(x)$$

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. Estude a função f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico e, caso existam, indique as suas equações.

4.2. Mostre que a condição $f(x) = -e$ tem, pelo menos, uma solução em $]-e, -1[$

4.3. Estude a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) de monotonia e, caso existam, os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

5. Na Figura 5, estão representados uma circunferência de centro O e raio 2 e os pontos P, Q, R e S

Sabe-se que:

- os pontos P, Q, R e S pertencem à circunferência;
- $[PR]$ é um diâmetro da circunferência;
- $\overline{PQ} = \overline{PS}$
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo QPR
- $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$
- $A(\alpha)$ é a área do quadrilátero $[PQRS]$, em função de α

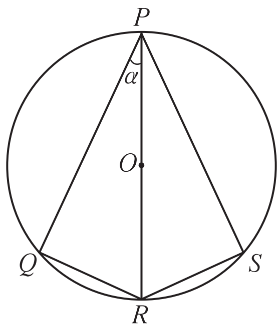


Figura 5

Para um certo número real θ, com $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, tem-se que $\operatorname{tg}\theta = 2\sqrt{2}$

Determine o valor exato de $A(\theta)$, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Comece por mostrar que $A(\alpha) = 16 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$

6. Considere, num referencial o.n. xOy, a representação gráfica da função f, de domínio $[0,10]$, definida por $f(x) = -e^{\frac{x}{2}} + x^2 + 8$, e dois pontos A e B

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com o eixo das ordenadas;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e tem abcissa positiva;
- a reta AB tem declive -2

Determine a abcissa do ponto B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

– equacionar o problema;

– reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;

– indicar o valor da abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas.

7. Na Figura 6, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f, de grau 3

Sabe-se que:

- -2 e 3 são os únicos zeros da função f
- a função f tem um extremo relativo em $x = -2$
- h', primeira derivada de uma função h, tem domínio $\mathbb{R}$ e é definida por $h'(x) = \dfrac{f(x)}{e^{2x}}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 3$

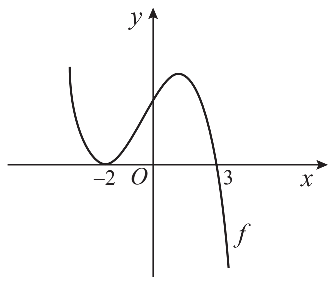


Figura 6

Considere as afirmações seguintes.

I) A função h tem dois extremos relativos.

II) $h''(-2) = 0$

III) $y + 3 = 0$ é uma equação da assíntota do gráfico da função h quando x tende para $+\infty$

Elabore uma composição, na qual indique, justificando, se cada uma das afirmações é verdadeira ou falsa.

Na sua resposta, apresente três razões diferentes, uma para cada afirmação.

FIM

Página em branco

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** ....(8 × 5 pontos)........	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	
1.1.	15 pontos
1.2.	15 pontos
2.	
2.1.	10 pontos
2.2.	15 pontos
3.	15 pontos
4.	
4.1.	20 pontos
4.2.	10 pontos
4.3.	15 pontos
5.	15 pontos
6.	15 pontos
7.	15 pontos
	160 pontos

TOTAL	**200 pontos**