

EXAME FINAL NACIONAL DO ENSINO SECUNDÁRIO

---

**Prova Escrita de Matemática A**

---

12.º Ano de Escolaridade

---

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

---

**Prova 635/2.ª Fase**

---

Critérios de Classificação

14 Páginas

---

**2016**

## CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

A ausência de indicação inequívoca da versão da prova implica a classificação com zero pontos das respostas aos itens de escolha múltipla.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

### Itens de seleção

Nos itens de escolha múltipla, a cotação do item só é atribuída às respostas que apresentem de forma inequívoca a opção correta. Todas as outras respostas são classificadas com zero pontos.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra correspondente.

### Itens de construção

Nos itens de resposta restrita e de resposta extensa, os critérios de classificação apresentam-se organizados por níveis de desempenho ou por etapas. A cada nível de desempenho e a cada etapa corresponde uma dada pontuação.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por níveis de desempenho resulta da pontuação do nível de desempenho em que forem enquadradas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

A classificação das respostas aos itens cujos critérios se apresentam organizados por etapas resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de desvalorização definidos para situações específicas.

Nas respostas classificadas por níveis de desempenho, se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

A classificação das respostas aos itens que envolvam a produção de um texto tem em conta a organização dos conteúdos e a utilização adequada de vocabulário específico da Matemática.

As respostas que não apresentem exatamente os mesmos termos ou expressões constantes dos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados, devidamente identificados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de resposta restrita e de resposta extensa que envolvam cálculos ou justificações.

Situação	Classificação
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelo programa da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplos: «sem recorrer à calculadora gráfica», «recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final quando é pedida a apresentação de cálculos ou justificações.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

Situação	Classificação
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada.  Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

**Nota 1** – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

**Nota 2** – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

# CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

## GRUPO I

1. a 8. .... (8 × 5 pontos)..... 40 pontos

Chave:

Itens	1	2	3	4	5	6	7	8
Versão 1	A	C	B	A	D	C	C	B
Versão 2	B	B	A	C	C	B	D	C

## GRUPO II

1.1. .... 15 pontos

Explicar o significado de  $P(B|A)$  no contexto da situação descrita ( $P(B|A)$  é a probabilidade de o produto dos números das fichas retiradas ser ímpar, sabendo que a sua soma é igual a 10) ..... 5 pontos

Indicar os casos possíveis, na forma pedida  $((1, 9), (2, 8), (3, 7)$  e  $(4, 6)$ ) (ver nota 1) ..... 4 pontos

Indicar os casos favoráveis  $((1, 9)$  e  $(3, 7))$  (ver nota 2) ..... 4 pontos

Apresentar o valor pedido  $(\frac{1}{2})$  (ver nota 3) ..... 2 pontos

**Notas:**

1. Se os casos possíveis não forem apresentados na forma pedida, a pontuação máxima a atribuir nesta etapa é 2 pontos.
2. Se os casos favoráveis não forem apresentados na forma pedida, a pontuação a atribuir nesta etapa não é desvalorizada.
3. Se as etapas relativas ao número de casos possíveis e ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos. Caso o valor obtido não pertença ao intervalo  $[0,1]$ , a pontuação a atribuir nesta etapa também é 0 pontos.

1.2. .... 15 pontos

Apresentar a expressão  $4 \times 4! \times {}^{12}A_5$  (ou outra expressão equivalente, que utilize a simbologia da combinatória) (ver nota 1) ..... 14 pontos

Obter o valor pedido (9123 840) (ver nota 2) ..... 1 ponto

**Notas:**

1. A expressão  $4 \times 4! \times {}^{12}A_5$  é o produto das expressões  $4$ ,  $4!$  e  ${}^{12}A_5$ . Por cada expressão conceptualmente incorreta ou não apresentada, são descontados 7 pontos. Também são descontados 7 pontos caso seja considerada, uma ou mais vezes, uma operação diferente da multiplicação. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, esta etapa é pontuada com 0 pontos.
2. A pontuação relativa a esta etapa só é atribuída se à etapa anterior não tiverem sido atribuídos 0 pontos.

**2. .... 15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, cinco processos.

**1.º Processo**

- Escrever  $-1 + i$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto
- Escrever  $(\rho \operatorname{cis}\theta)^2 = \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)$  ..... 2 pontos
- Indicar o módulo de  $z$ , em função de  $\rho$  ..... 1 ponto
- Escrever um argumento de  $z$ , em função de  $\theta$  ..... 2 pontos
- Escrever  $-\sqrt{2}i$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto
- Concluir que  $\frac{\sqrt{2}}{\rho^2} = \sqrt{2} \wedge \frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (ou equivalente) ..... 2 pontos
- Obter o valor de  $\rho(1)$  ..... 1 ponto
- Resolver a condição  $\frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (ou uma condição equivalente), em ordem a  $\theta$  ..... 2 pontos
- Obter o valor de  $\theta$  pertencente ao intervalo  $]0, \pi[ \left( \frac{5\pi}{8} \right)$  ..... 3 pontos

**2.º Processo**

- Escrever  $(\rho \operatorname{cis}\theta)^2$  na forma algébrica ..... 3 pontos
- Escrever  $z$  na forma algébrica ..... 4 pontos
- Escrever a condição
- $$\frac{\operatorname{sen}(2\theta) - \cos(2\theta)}{\rho^2} = 0 \wedge \frac{\cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta)}{\rho^2} = -\sqrt{2} \dots\dots\dots 1 \text{ ponto}$$
- Escrever a condição
- $$2\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge \frac{\cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta)}{\rho^2} = -\sqrt{2}, \text{ com } k \in \mathbb{Z} \text{ e } \theta \in ]0, \pi[ \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$$
- Escrever a condição
- $$\left( \theta = \frac{\pi}{8} \vee \theta = \frac{5\pi}{8} \right) \wedge \frac{\cos(2\theta) + \operatorname{sen}(2\theta)}{\rho^2} = -\sqrt{2} \dots\dots\dots 2 \text{ pontos}$$
- Obter o valor de  $\theta$  e o valor de  $\rho \left( \theta = \frac{5\pi}{8} \text{ e } \rho = 1 \right)$  ..... 3 pontos

### 3.º Processo

Escrever  $-1 + i$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto

Escrever  $(\rho \operatorname{cis} \theta)^2 = \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)$  ..... 2 pontos

Indicar o módulo de  $z$ , em função de  $\rho$  ..... 1 ponto

Escrever um argumento de  $z$ , em função de  $\theta$  ..... 2 pontos

Escrever  $z$  na forma algébrica ..... 1 ponto

Escrever a condição

$\frac{\sqrt{2}}{\rho^2} \cos\left(\frac{3\pi}{4} - 2\theta\right) = 0 \wedge \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\theta\right) = -\sqrt{2}$  ..... 1 ponto

Escrever a condição

$$\frac{3\pi}{4} - 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \wedge \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\theta\right) = -\sqrt{2},$$

com  $k \in \mathbb{Z}$  e  $\theta \in ]0, \pi[$  ..... 2 pontos

Escrever a condição

$\left(\theta = \frac{\pi}{8} \vee \theta = \frac{5\pi}{8}\right) \wedge \frac{\sqrt{2}}{\rho^2} \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4} - 2\theta\right) = -\sqrt{2}$  ..... 2 pontos

Obter o valor de  $\theta$  e o valor de  $\rho$   $\left(\theta = \frac{5\pi}{8}$  e  $\rho = 1\right)$  ..... 3 pontos

### 4.º Processo

Escrever  $z = w \Leftrightarrow \frac{-1+i}{-\sqrt{2}i} = (\rho \operatorname{cis} \theta)^2$  ..... 1 ponto

Escrever  $(\rho \operatorname{cis} \theta)^2 = \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)$  ..... 2 pontos

Escrever  $\frac{-1+i}{-\sqrt{2}i} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{2}i}{2}$  ..... 3 pontos

Escrever  $z = w \Leftrightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} = \rho^2 \cos(2\theta) + i\rho^2 \operatorname{sen}(2\theta)$  ..... 1 ponto

Escrever  $z = w \Leftrightarrow \rho^2 \cos(2\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \wedge \rho^2 \operatorname{sen}(2\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ..... 1 ponto

Concluir que  $z = w \Leftrightarrow \cos(2\theta) = \operatorname{sen}(2\theta) \wedge \rho^2 \operatorname{sen}(2\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ..... 1 ponto

Escrever a condição  $2\theta = \frac{\pi}{4} + k\pi \wedge \rho^2 \operatorname{sen}(2\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

com  $k \in \mathbb{Z}$  e  $\theta \in ]0, \pi[$  ..... 1 ponto

Escrever a condição

$\left(\theta = \frac{\pi}{8} \vee \theta = \frac{5\pi}{8}\right) \wedge \rho^2 \operatorname{sen}(2\theta) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  ..... 2 pontos

Obter o valor de  $\theta$  e o valor de  $\rho$   $\left(\theta = \frac{5\pi}{8}$  e  $\rho = 1\right)$  ..... 3 pontos

**5.º Processo**

- Escrever  $z = w \Leftrightarrow \frac{-1+i}{-\sqrt{2}i} = (\rho \operatorname{cis}\theta)^2$  ..... 1 ponto
- Escrever  $-1+i$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto
- Escrever  $-\sqrt{2}i$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto
- Escrever  $\frac{-1+i}{-\sqrt{2}i}$  na forma trigonométrica ..... 1 ponto
- Escrever  $(\rho \operatorname{cis}\theta)^2 = \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)$  ..... 2 pontos
- Escrever  $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4} = \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta)$  ..... 1 ponto
- Concluir que  $z = w \Leftrightarrow \rho^2 = 1 \wedge 2\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (ou equivalente) .... 2 pontos
- Obter o valor de  $\rho$  (1) ..... 1 ponto
- Resolver a condição  $2\theta = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (ou uma condição equivalente), em ordem a  $\theta$  ..... 2 pontos
- Obter o valor de  $\theta$  pertencente ao intervalo  $]0, \pi[ \left( \frac{5\pi}{8} \right)$  ..... 3 pontos

**3.1. .... 5 pontos**

- Escrever as coordenadas de um vetor diretor da reta pedida ..... 2 pontos
- Escrever uma equação vetorial da reta pedida  
 $((x, y, z) = (2, 1, 4) + k(3, 2, 4), k \in \mathbb{R}$  ou outra equação vetorial equivalente) 3 pontos

**Nota** – Se for apresentada apenas a equação  $(x, y, z) = (2, 1, 4) + k(3, 2, 4), k \in \mathbb{R}$  (ou outra equação vetorial equivalente), a pontuação a atribuir à resposta é 5 pontos.

**3.2. .... 15 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

**1.º Processo** (recorrendo a uma condição cartesiana da reta  $OD$ )

- Escrever  $\overrightarrow{OD} = (4, 2, 2)$  ..... 1 ponto
- Escrever uma condição cartesiana da reta  $OD$  (por exemplo,  $\frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$ ) .... 5 pontos
- Escrever o sistema  $\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 12 = 0 \\ \frac{x}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2} \end{cases}$  (ou equivalente) ..... 3 pontos
- Resolver o sistema ..... 5 pontos
- Indicar as coordenadas do ponto de intersecção  $((2, 1, 1))$  ..... 1 ponto

**2.º Processo** (recorrendo a uma equação vetorial da reta  $OD$ )

- Escrever  $\overrightarrow{OD} = (4, 2, 2)$  ..... 1 ponto
- Escrever uma equação vetorial da reta  $OD$   
 $((x, y, z) = k(4, 2, 2), k \in \mathbb{R}$  ou outra equação vetorial equivalente) ..... 3 pontos
- Escrever as coordenadas de um ponto genérico da reta  $OD$ , em função de  $k$  ..... 2 pontos
- Obter uma equação na variável  $k$ , substituindo  $x$ ,  $y$  e  $z$  na equação do plano  $\alpha$  pelas coordenadas de um ponto genérico da reta  $OD$  ..... 4 pontos
- Obter o valor de  $k$  ..... 2 pontos
- Obter as coordenadas do ponto de intersecção  $((2, 1, 1))$  ..... 3 pontos

**3.3.** ..... **10 pontos**

- Seja  $z$  a cota do ponto  $P$
- Escrever  $P(0, 0, z)$  (**ver nota**) ..... 2 pontos
- Determinar as coordenadas do ponto  $A$  ..... 1 ponto
- Determinar as coordenadas do ponto  $B$  ..... 1 ponto
- Determinar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{PA}$ , em função de  $z$  (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Determinar as coordenadas do vetor  $\overrightarrow{PB}$ , em função de  $z$  (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Calcular  $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$  ( $z^2$ ) (**ver nota**) ..... 1 ponto
- Concluir o pretendido (referir que a conclusão resulta do facto de o produto escalar ser positivo) (**ver nota**) ..... 3 pontos

**Nota** – Se for apresentada uma concretização para a cota do ponto  $P$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

**4.1.** ..... **15 pontos**

- Determinar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  ..... 8 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x}$  ..... 1 ponto
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$  ..... 3 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x}$  ..... 2 pontos
- Reconhecer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$  ..... 1 ponto
- Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  (1) ..... 1 ponto

- Determinar  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$  ..... 4 pontos
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - x)$  ..... 1 ponto
- Escrever  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x)$  ..... 1 ponto
- Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) (-\infty)$  ..... 2 pontos
- Concluir que o gráfico da função  $f$  não tem assíntota oblíqua ..... 3 pontos

**Notas:**

- Se for evidente a intenção de determinar  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ , a classificação a atribuir à resposta é desvalorizada em 2 pontos. Se, por aplicação deste critério, o valor obtido for negativo, a resposta é classificada com 0 pontos.
- Se for evidente a intenção de determinar  $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{f(x)}{x}$ , a classificação a atribuir à resposta é desvalorizada em 2 pontos.

**4.2. .... 15 pontos**

- Determinar  $f'(x)$  em  $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$  (**ver nota 1**) ..... 4 pontos
- Determinar o zero de  $f'$  em  $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$  ..... 5 pontos
- Escrever  $f'(x) = 0$  ..... 1 ponto
- Obter o zero de  $f'$  em  $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$  ..... 4 pontos
- Estudar a função  $f$  quanto à monotonia, no intervalo  $\left] -\frac{\pi}{2}, 0 \right[$  ..... 6 pontos
- Apresentar um quadro de sinal de  $f'$  e de monotonia de  $f$  (ou equivalente) (**ver notas 2 e 3**) ..... 5 pontos
- Concluir que a função tem um mínimo para  $x = -\frac{\pi}{6}$  ..... 1 ponto

**Notas:**

- Se for evidente a intenção de determinar a expressão da derivada da função, a pontuação mínima a atribuir nesta etapa é 1 ponto.
- Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar  $-\infty$ , em vez de  $-\frac{\pi}{2}$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
- Se, na primeira linha do quadro, a resposta apresentar  $+\infty$ , em vez de 0, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 2 pontos.
- Se for utilizada a expressão  $x - \ln x$ , a pontuação máxima a atribuir à resposta é 2 pontos (1 ponto pela intenção de calcular  $f'(x)$  e 1 ponto pela intenção de resolver a equação  $f'(x) = 0$ ).

**4.3. .... 15 pontos**

- Determinar  $f'(x)$  em  $]0, +\infty[$  ..... 2 pontos
- Obter  $f'\left(\frac{1}{2}\right)$  ..... 1 ponto
- Obter  $f\left(\frac{1}{2}\right)$  ..... 1 ponto
- Escrever a equação reduzida da reta  $r$  ..... 2 pontos
- Reproduzir o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver o problema (**ver nota**) ..... 5 pontos
- Apresentar a abcissa do ponto  $A (-1, 19)$  ..... 2 pontos
- Apresentar a abcissa do ponto  $B (-0, 17)$  ..... 2 pontos

**Nota** – Se não for apresentado o referencial, a pontuação a atribuir nesta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

**5.1. .... 15 pontos**

- Equacionar o problema ..... 3 pontos
- Resolver a equação  $24 = \frac{600 \times 0,003}{1 - e^{-0,003n}}$  ..... 10 pontos
- Escrever  $24 = \frac{600 \times 0,003}{1 - e^{-0,003n}} \Leftrightarrow 24(1 - e^{-0,003n}) = 1,8$  ..... 2 pontos
- Escrever  $24(1 - e^{-0,003n}) = 1,8 \Leftrightarrow 1 - e^{-0,003n} = \frac{1,8}{24}$  ..... 2 pontos
- Escrever  $1 - e^{-0,003n} = \frac{1,8}{24} \Leftrightarrow e^{-0,003n} = \frac{37}{40}$  ..... 2 pontos
- Escrever  $e^{-0,003n} = \frac{37}{40} \Leftrightarrow -0,003n = \ln\left(\frac{37}{40}\right)$  ..... 3 pontos
- Escrever  $-0,003n = \ln\left(\frac{37}{40}\right) \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{37}{40}\right)}{-0,003}$  ..... 1 ponto
- Responder ao problema (26 meses) (**ver nota**) ..... 2 pontos

**Nota** – Se a resposta for  $n \approx 26$ , esta etapa é considerada como cumprida.

Determinar  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}}$  ..... 10 pontos

Este limite pode ser determinado por, pelo menos, três processos.

**1.º Processo**

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \underset{y=-nx}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{600\left(-\frac{y}{n}\right)}{1 - e^y}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{600\left(-\frac{y}{n}\right)}{1 - e^y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-600y}{n(1 - e^y)}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{-600y}{n(1 - e^y)} = \frac{600}{n} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{1 - e^y}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\frac{600}{n} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{1 - e^y} = \frac{600}{n} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\frac{600}{n} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{e^y - 1} = \frac{600}{n} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{e^y - 1}{y}}$  ..... 2 pontos

Reconhecer o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \left( \frac{600}{n} \right)$  ..... 1 ponto

**2.º Processo**

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - \frac{1}{e^{nx}}}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - \frac{1}{e^{nx}}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{\frac{e^{nx} - 1}{e^{nx}}}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{\frac{e^{nx} - 1}{e^{nx}}} \underset{y=nx}{=} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{600\left(\frac{y}{n}\right)}{\frac{e^y - 1}{e^y}}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{600\left(\frac{y}{n}\right)}{\frac{e^y - 1}{e^y}} = \frac{600}{n} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y}{\frac{e^y - 1}{y}}$  ..... 2 pontos

Reconhecer o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \left( \frac{600}{n} \right)$  ..... 2 pontos

**3.º Processo**

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{600}{\frac{1 - e^{-nx}}{x}}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600}{\frac{1 - e^{-nx}}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{600}{n \frac{1 - e^{-nx}}{nx}}$  ..... 1 ponto

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600}{n \frac{1 - e^{-nx}}{nx}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{600}{n \frac{e^{-nx} - 1}{-nx}}$  ..... 2 pontos

Escrever  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600}{n \frac{e^{-nx} - 1}{-nx}} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{600}{n \frac{e^y - 1}{y}}$  ..... 2 pontos

Reconhecer o limite notável  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  ..... 1 ponto

Obter o valor de  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{600x}{1 - e^{-nx}} \left( \frac{600}{n} \right)$  ..... 2 pontos

Interpretar o resultado no contexto da situação descrita (Quando a taxa de juro tende para zero, a prestação mensal tende para o quociente entre o valor do empréstimo e o número de prestações mensais) ..... 5 pontos

**6. .... 10 pontos**

Referir que, em  $[a, g(a)]$ , a função  $h$ , definida por  $h(x) = g(x) - x - 1$ , é contínua (**ver notas 1 e 2**) ..... 1 ponto

Determinar  $h(a)$  ..... 1 ponto

Determinar  $h(g(a))$  ..... 2 pontos

Referir que  $h(a) > 0$  ..... 1 ponto

Justificar que  $h(g(a)) < 0$  (**ver nota 3**) ..... 3 pontos

Evocar o teorema de Bolzano para concluir que a função  $h$  tem pelo menos um zero em  $]a, g(a)[$  ..... 1 ponto

Concluir o pretendido ..... 1 ponto

**Notas:**

1. Se apenas for referido que a função  $h$  é contínua, esta etapa é considerada como cumprida.
2. Se for referido que a função  $h$  é contínua em  $]a, g(a)[$ , a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.
3. Se apenas for referido que  $h(g(a)) < 0$ , sem qualquer justificação, a pontuação a atribuir nesta etapa é 0 pontos.

## COTAÇÕES

Grupo	Item												
	Cotação (em pontos)												
I	1. a 8.												40
	8 × 5 pontos												
II	1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.1.	5.2.	6.	160
	15	15	15	5	15	10	15	15	15	15	15	10	
TOTAL													200