REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 11 Páginas

---

VERSÃO 1

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ $(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Página em branco

GRUPO I

1. Considere todos os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9

Destes números, quantos são múltiplos de 5 ?

(A) 729 **(B)** 1458 **(C)** 3645 **(D)** 6561

2. Uma turma é constituída por rapazes e por raparigas, num total de 20 alunos.

Sabe-se que:

- $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes;
- escolhido, ao acaso, um aluno da turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$

Quantos rapazes tem a turma?

(A) 4 **(B)** 8 **(C)** 12 **(D)** 16

3. Na Figura 1, está representada, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico de uma função polinomial f

Sabe-se que o único ponto de inflexão do gráfico de f tem abcissa 0

Seja f'' a segunda derivada da função f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f''(1)+f''(2)<0$

(B) $f''(-2)+f''(-1)>0$

(C) $f''(-1)\times f''(-2)<0$

(D) $f''(1)\times f''(2)>0$

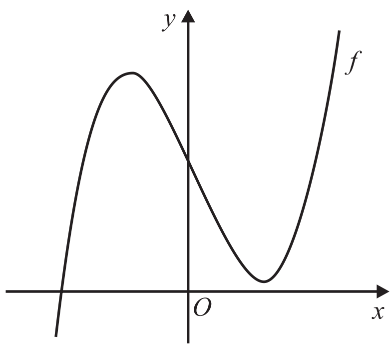

Figura 1

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) \times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** -1 **(D)** $-\infty$

5. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $]-1, +\infty[$, definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

(A) $\left]-\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right[$ **(B)** $\left]\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$ **(C)** $\left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{4}\right[$ **(D)** $\left]\dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$

6. Considere, num referencial o.n. xOy, uma reta r de inclinação α

Sabe-se que $\cos \alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = -5x$ **(B)** $y = 4x$ **(C)** $y = -2x$ **(D)** $y = 3x$

7. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq -1$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

Qual é a área dessa região?

(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ **(B)** $\dfrac{1}{2}$ **(C)** $\sqrt{2}$ **(D)** 1

8. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 20 \\ (-1)^n & \text{se } n > 20 \end{cases}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é monótona crescente.

(B) A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

(C) A sucessão (u_n) é limitada.

(D) A sucessão (u_n) é um infinitamente grande.

GRUPO II

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3k\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right), \text{ com } k \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$

Qual é o valor de k ?

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2. Na Figura 2, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, o prisma quadrangular regular $[OPQRSTUV]$

Sabe-se que:

- a face $[OPQR]$ está contida no plano xOy
- o vértice Q pertence ao eixo Oy e o vértice T pertence ao eixo Oz
- o plano STU tem equação $z = 3$

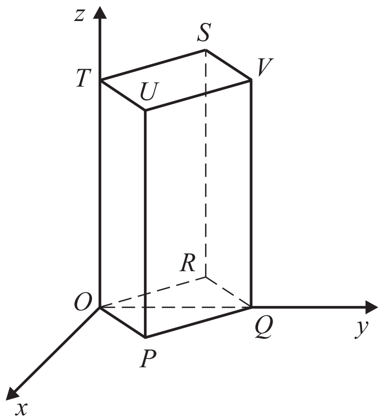

Figura 2

2.1. Seja T' o simétrico do ponto T, relativamente à origem do referencial.

Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[TT']$

2.2. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{UP}.\overrightarrow{RS}$

2.3. Uma equação do plano PQV é $x + y = 2$

Determine uma condição cartesiana que defina a reta TQ

2.4. Escolhem-se, ao acaso, três vértices do prisma.

Determine a probabilidade de o plano definido por esses três vértices ser perpendicular ao plano xOy

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Um saco contém n bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n (com n par e superior a 6).

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o número da bola retirada é menor ou igual a 6»

B: «o número da bola retirada é par»

Escreva o significado de $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ no contexto da situação descrita e determine uma expressão, em função de n, que dê esta probabilidade.

Apresente a expressão na forma de uma fração.

4. Na Figura 3, está representada uma secção de uma ponte pedonal que liga as duas margens de um rio.

A ponte, representada pelo arco PQ, está suportada por duas paredes, representadas pelos segmentos de reta $[OP]$ e $[RQ]$. A distância entre as duas paredes é 7 metros.

O segmento de reta $[OR]$ representa a superfície da água do rio.

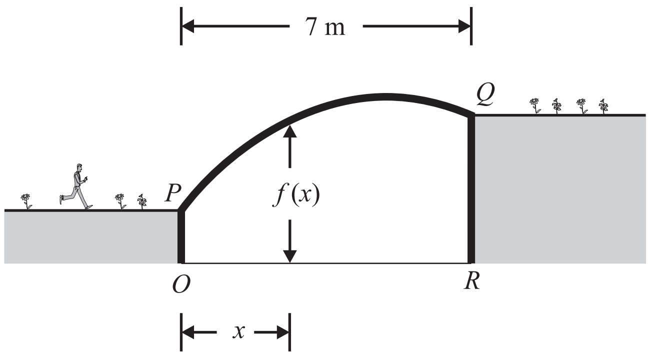

Figura 3

Considere a reta OR como um eixo orientado da esquerda para a direita, com origem no ponto O e em que uma unidade corresponde a 1 metro.

Para cada ponto situado entre O e R, de abcissa x, a distância na vertical, medida em metros, desse ponto ao arco PQ é dada por

$$f(x) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right), \text{ com } x \in [0, 7]$$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos; utilize a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos.

4.1. Seja S o ponto pertencente ao segmento de reta $[OR]$ cuja abcissa x verifica a equação

$$\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2$$

Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete essa solução no contexto da situação descrita.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4.2. O clube náutico de uma povoação situada numa das margens do rio possui um barco à vela. Admita que, sempre que esse barco navega no rio, a distância do ponto mais alto do mastro à superfície da água é 6 metros.

Será que esse barco, navegando no rio, pode passar por baixo da ponte?

Justifique a sua resposta.

5. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se} \quad x<1 \\ 2 & \text{se} \quad x=1 \\ 3+\dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se} \quad x>1 \end{cases}$$

Resolva os itens **5.1.** e **5.2.** recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1

5.2. Resolva, no intervalo $]4, 5[$, a equação $g(x)=3$

5.3. Na Figura 4, estão representados, num referencial o.n. xOy, parte do gráfico da função g e um triângulo $[OAP]$

Sabe-se que:

- o ponto A é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g, de abcissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 5

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, a abcissa do ponto P

Apresente o valor obtido arredondado às décimas.

Na sua resposta:

– determine analiticamente a abcissa do ponto A

– equacione o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação.

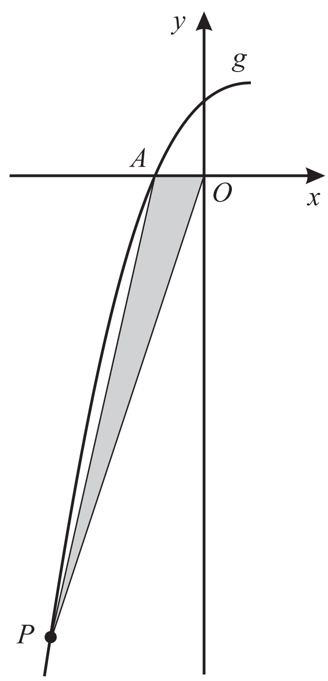

Figura 4

6. Seja $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo x

Considere, num referencial o.n. xOy,

- um ponto P, de abcissa a, pertencente ao gráfico de f
- a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P
- o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$

Determine o valor de $f'(a) + \dfrac{f(a)}{a}$

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item Cotação (em pontos)												
I	**1.** a **8.** 8 × 5 pontos												**40**
II	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**2.4.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	
	15	5	10	15	15	15	15	15	15	15	15	10	**160**
TOTAL													**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

1.ª Fase

VERSÃO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2017

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Entrelinha 1,5, sem figuras

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 12 Páginas

VERSÃO 1

Indique de forma legível a versão da prova.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Para cada resposta, identifique o grupo e o item.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a + b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a + b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} b}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis}\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho}\, \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\, v)' = u'\, v + u\, v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\, v - u\, v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\, u^{n-1}\, u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

GRUPO I

1. Considere todos os números naturais de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9

Destes números, quantos são múltiplos de 5 ?

(A) 729

(B) 1458

(C) 3645

(D) 6561

2. Uma turma é constituída por rapazes e por raparigas, num total de 20 alunos.

Sabe-se que:

- $\frac{1}{4}$ dos rapazes tem olhos verdes;
- escolhido, ao acaso, um aluno da turma, a probabilidade de ele ser rapaz e de ter olhos verdes é $\frac{1}{10}$

Quantos rapazes tem a turma?

(A) 4

(B) 8

(C) 12

(D) 16

3. Considere uma função polinomial f

Sabe-se que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, 0[$ e voltada para cima em $]0, +\infty[$

Seja f'' a segunda derivada da função f

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $f''(1) + f''(2) < 0$

(B) $f''(-2) + f''(-1) > 0$

(C) $f''(-1) \times f''(-2) < 0$

(D) $f''(1) \times f''(2) > 0$

4. Sejam f e g duas funções de domínio $\mathbb{R}^+$

Sabe-se que a reta de equação $y = -x$ é assíntota oblíqua do gráfico de f e do gráfico de g

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x) \times g(x)}{x}$?

(A) $+\infty$

(B) 1

(C) -1

(D) $-\infty$

5. Seja f a função, de domínio A e contradomínio $]-1, +\infty[$, definida por $f(x) = \operatorname{tg} x$

Qual dos conjuntos seguintes pode ser o conjunto A ?

(A) $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$

(B) $\left]\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

(C) $\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$

(D) $\left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[$

6. Considere, num referencial o.n. xOy, uma reta r de inclinação α

Sabe-se que $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Qual pode ser a equação reduzida da reta r ?

(A) $y = -5x$

(B) $y = 4x$

(C) $y = -2x$

(D) $y = 3x$

7. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição

$$\frac{5\pi}{4} \leq \arg(z) \leq \frac{7\pi}{4} \ \wedge \ \operatorname{Im}(z) \geq -1$$

No plano complexo, esta condição define uma região.

Qual é a área dessa região?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\sqrt{2}$

(D) 1

8. Seja (u_n) a sucessão definida por $u_n = \begin{cases} n & \text{se } n \leq 20 \\ (-1)^n & \text{se } n > 20 \end{cases}$

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) A sucessão (u_n) é monótona crescente.

(B) A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

(C) A sucessão (u_n) é limitada.

(D) A sucessão (u_n) é um infinitamente grande.

GRUPO II

1. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, sejam

$$z_1 = \frac{1-3i^{19}}{1+i} \quad \text{e} \quad z_2 = -3k\,\text{cis}\left(\frac{3\pi}{2}\right), \text{ com } k \in \mathbb{R}^+$$

Sabe-se que, no plano complexo, a distância entre a imagem geométrica de z_1 e a imagem geométrica de z_2 é igual a $\sqrt{5}$

Qual é o valor de k ?

Resolva este item sem recorrer à calculadora.

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o ponto $A(0, 0, 3)$

2.1. Seja A' o simétrico do ponto A, relativamente à origem do referencial.

Escreva uma equação da superfície esférica de diâmetro $[AA']$

2.2. Determine o valor do produto escalar $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AO}$

2.3. Seja α o plano de equação $x + y = 2$

Seja B o ponto de intersecção do plano α com o eixo Oy

Determine uma condição cartesiana que defina a reta AB

2.4. Considere um prisma quadrangular regular em que uma das bases está contida no plano xOy, uma diagonal dessa base está contida no semieixo positivo Oy e uma das arestas laterais é o segmento de reta $[OA]$

Escolhem-se, ao acaso, três vértices do prisma.

Determine a probabilidade de o plano definido por esses três vértices ser perpendicular ao plano xOy

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

3. Um saco contém n bolas indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a n (com n par e superior a 6).

Retira-se, ao acaso, uma bola do saco.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: «o número da bola retirada é menor ou igual a 6»

B: «o número da bola retirada é par»

Escreva o significado de $P\left(\overline{A} \cup B\right)$ no contexto da situação descrita e determine uma expressão, em função de n, que dê esta probabilidade.

Apresente a expressão na forma de uma fração.

4. Considere a função f, de domínio $[0, 7]$, definida por $f(x) = 9 - 2{,}5\left(e^{1-0{,}2x} + e^{0{,}2x-1}\right)$

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** recorrendo a métodos analíticos.

Na resolução do item **4.1.**, pode utilizar a calculadora para efectuar eventuais cálculos numéricos.

4.1. Seja P o ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Oy

Seja Q o ponto do eixo Ox cuja abcissa x (com $x \in [0, 7]$) verifica a equação

$$\sqrt{\left(f(0)\right)^2 + x^2} = 2$$

Resolva esta equação, apresentando a solução arredondada às décimas, e interprete geometricamente essa solução.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

4.2. Estude a função f quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

5. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^2}{1-e^{x-1}} & \text{se} \quad x < 1 \\ 2 & \text{se} \quad x = 1 \\ 3 + \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{1-x} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

5.1. Estude a função g quanto à continuidade no ponto 1

5.2. Resolva, no intervalo $]4, 5[$, a equação $g(x) = 3$

5.3. Considere, num referencial o.n. xOy, um triângulo $[OAP]$

Sabe-se que:

- o ponto O é a origem do referencial;
- o ponto A é o ponto de abcissa negativa que é a intersecção do gráfico da função g com o eixo das abcissas;
- o ponto P é um ponto do gráfico da função g, de abcissa e ordenada negativas;
- a área do triângulo $[OAP]$ é igual a 5

Escreva uma equação que lhe permita determinar a abcissa do ponto P

Não resolva a equação.

6. Seja $f:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ uma função tal que $f'(x) < 0$, para qualquer número real positivo x

Considere, num referencial o.n. xOy,

- um ponto P, de abcissa a, pertencente ao gráfico de f
- a reta r, tangente ao gráfico de f no ponto P
- o ponto Q, ponto de intersecção da reta r com o eixo Ox

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{PQ}$

Determine o valor de $f'(a) + \dfrac{f(a)}{a}$

FIM

COTAÇÕES

GRUPO I

1. a **8.** .... (8 × 5 pontos)	40 pontos
	40 pontos

GRUPO II

1.	15 pontos
2.	
2.1.	5 pontos
2.2.	10 pontos
2.3.	15 pontos
2.4.	15 pontos
3.	15 pontos
4.	
4.1.	15 pontos
4.2.	15 pontos
5.	
5.1.	15 pontos
5.2.	15 pontos
5.3.	15 pontos
6.	10 pontos
	160 pontos

TOTAL .... **200 pontos**