REPÚBLICA PORTUGUESA
EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

Caderno 1
7 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

Apresente as suas respostas de forma legível.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

A prova inclui um formulário.

As cotações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 1.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 1.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

1.1. Seja X uma variável aleatória com distribuição normal de valor médio μ e desvio padrão σ

Qual é o valor, arredondado às milésimas, de $P(X > \mu - 2\sigma)$?

(A) $0{,}926$ **(B)** $0{,}982$ **(C)** $0{,}977$ **(D)** $0{,}943$

PMC2015

1.2. Na Figura 1, está representado um triângulo $[ABC]$

Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 5$
- $B\hat{A}C = 57°$
- $A\hat{B}C = 81°$

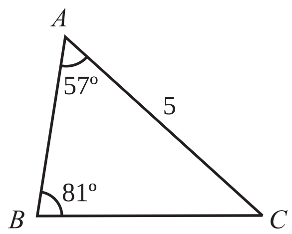

Figura 1

Qual é o valor de $\overline{AB}$, arredondado às centésimas ?

(A) $3{,}31$ **(B)** $3{,}35$ **(C)** $3{,}39$ **(D)** $3{,}43$

2. Num clube desportivo, praticam-se as modalidades de basquetebol e futebol, entre outras.

Sabe-se que, escolhido ao acaso um atleta deste clube, a probabilidade de ele praticar basquetebol é $\frac{1}{5}$ e a probabilidade de ele praticar futebol é $\frac{2}{5}$

Sabe-se ainda que, dos atletas que não praticam futebol, 3 em cada 4 não praticam basquetebol.

Mostre que existe, pelo menos, um atleta do clube que pratica as duas modalidades desportivas.

3. Dispõe-se de catorze caracteres (a saber: os algarismos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e as vogais a, e, i, o, u) para formar códigos de quatro caracteres.

3.1. Quantos códigos iniciados por uma vogal seguida de três algarismos diferentes se podem formar?

(A) 420 **(B)** 504 **(C)** 1840 **(D)** 2520

3.2. Escolhe-se, ao acaso, um código de entre todos os códigos de quatro caracteres, repetidos ou não, que é possível formar com os catorze caracteres.

Determine a probabilidade de esse código ser constituído por quatro algarismos diferentes cujo produto seja um número ímpar.

Apresente o resultado arredondado às milésimas.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a superfície esférica de equação

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=10$$

4.1. Seja P o ponto da superfície esférica de abcissa 1, ordenada 3 e cota negativa.

Seja r a reta de equação vetorial $(x,y,z)=(-1,0,3)+k(4,1,-2),\ k\in\mathbb{R}$

Determine uma equação do plano que passa no ponto P e é perpendicular à reta r

Apresente essa equação na forma $ax+by+cz+d=0$

4.2. Seja C o centro da superfície esférica e seja A o simétrico do ponto C relativamente ao plano xOy

Determine a amplitude do ângulo AOC

Apresente o resultado em graus, arredondado às unidades.

Se, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

5. O planeta Mercúrio descreve uma órbita elíptica em torno do Sol. Na Figura 2, está representado um esquema de uma parte dessa órbita.

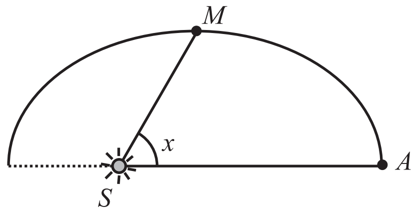

Figura 2

Relativamente a esta figura, tem-se que:

- o ponto S representa o Sol;
- o ponto M representa o planeta Mercúrio;
- o ponto A representa o afélio, que é o ponto da órbita mais afastado do Sol;
- x é a amplitude do ângulo ASM, compreendida entre 0 e 180 graus.

Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, do planeta Mercúrio ao Sol é dada, em função de x, por

$$d = \frac{555}{10 - 2{,}06 \cos x}$$

Seja α a amplitude do ângulo ASM, num certo instante (α está compreendido entre 0 e 20 graus). Nesse instante, o planeta Mercúrio encontra-se a uma certa distância do Sol.

Passado algum tempo, a amplitude do ângulo ASM é três vezes maior e a distância do planeta Mercúrio ao Sol diminuiu 3%.

Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, o valor de α, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente o valor de α em graus, arredondado às unidades.

6. A primeira derivada de uma função f, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, é dada por $f'(x) = 3x - \operatorname{tg} x$

Sabe-se que o gráfico de f tem um único ponto de inflexão.

Qual é a abcissa desse ponto, arredondada às centésimas?

(A) $0{,}84$ **(B)** $0{,}88$ **(C)** $0{,}92$ **(D)** $0{,}96$

7. De uma progressão aritmética (u_n) sabe-se que o terceiro termo é igual a 4 e que a soma dos doze primeiros termos é igual a 174

Averigue se 5371 é termo da sucessão (u_n)

8. Na Figura 3, está representado, no plano complexo, um pentágono regular $[ABCDE]$ inscrito numa circunferência de centro na origem e raio 1

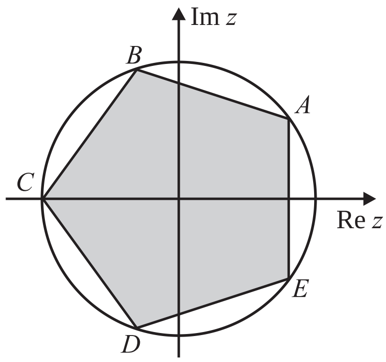

Figura 3

Sabe-se que o ponto C pertence ao semieixo real negativo.

Seja z o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto A

Qual é o valor de z^5 ?

(A) -1 **(B)** 1 **(C)** i **(D)** $-i$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	
8		12	8	12	12	13	12	8	12	8	**105**

Prova 635

2.ª Fase

CADERNO 1

REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2018

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

5 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

9.1. Num dado problema de Programação Linear, pretende-se determinar o valor máximo que a função objetivo, definida por $L = 3x + 5y$, pode alcançar.

Sabe-se que a região admissível é definida pelo seguinte sistema.

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 10 \\ x \leq 5 \end{cases}$$

Qual é esse valor máximo?

(A) 56 **(B)** 50 **(C)** 40 **(D)** 36

PMC2015

9.2. Considere, num referencial o.n. xOy, uma elipse centrada na origem do referencial e de focos F_1 e F_2 pertencentes ao eixo Ox

Sabe-se que:

- $\overline{F_1F_2} = 12$
- sendo P um ponto qualquer da elipse, tem-se $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 20$

Qual é a equação reduzida desta elipse?

(A) $\dfrac{x^2}{64} + \dfrac{y^2}{100} = 1$ **(B)** $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$

(C) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$ **(D)** $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{y^2}{100} = 1$

10. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere $z = \frac{(2-i)^2 + 1 + i}{1 - 2i} + 3\,i^{15}$

Escreva o complexo $-\frac{1}{2} \times \overline{z}$ na forma trigonométrica.

11. Considere, num referencial o.n. xOy, a circunferência centrada na origem do referencial e que passa no ponto $A(2,1)$

Seja r a reta tangente à circunferência no ponto A

Qual é a ordenada na origem da reta r ?

(A) 4 **(B)** 5 **(C)** 6 **(D)** 7

12.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 12.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 12.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, homologado em 2015 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

12.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, os planos α, β e γ definidos pelas equações $y = -x$, $y = z$ e $2x + 3y - z - 1 = 0$, respetivamente.

A intersecção dos planos α, β e γ é

(A) um ponto. **(B)** uma reta. **(C)** um plano. **(D)** o conjunto vazio.

PMC2015

12.2. Qual é o valor do limite da sucessão de termo geral $\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$?

(A) $+\infty$ **(B)** 1 **(C)** e^4 **(D)** e^2

13. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da inequação

$$\log_2(x+1) \leq 3 - \log_2(8-x)$$

Apresente a resposta usando a notação de intervalos de números reais.

14. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \dfrac{e^x}{1-x} & \text{se} \quad x < 1 \\ \dfrac{\ln(x^2)+2}{x} & \text{se} \quad x \geq 1 \end{cases}$$

14.1. Determine $f'(0)$, recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto.

14.2. Estude a função f quanto à existência de assíntotas horizontais do seu gráfico.

14.3. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = x+1$

Qual é o valor de $\left(f \circ h^{-1}\right)(2)$?

(o símbolo $\circ$ designa a composição de funções)

(A) 0 **(B)** 1 **(C)** 2 **(D)** 3

15. Seja g a função, de domínio $[0, \pi]$, definida por $g(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$

Seja r a reta tangente ao gráfico da função g que tem declive máximo.

Determine o declive da reta r

Apresente a sua resposta na forma $\dfrac{a\sqrt{b}}{c}$, com a, b e c números naturais.

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

<table>
<tr><th colspan="12">Item</th></tr>
<tr><td colspan="12">Cotação (em pontos)</td></tr>
<tr><th>9.1.</th><th>9.2.</th><th>10.</th><th>11.</th><th>12.1.</th><th>12.2.</th><th>13.</th><th>14.1.</th><th>14.2.</th><th>14.3.</th><th>15.</th><th></th></tr>
<tr><td colspan="2">8</td><td>12</td><td>8</td><td colspan="2">8</td><td>13</td><td>13</td><td>13</td><td>8</td><td>12</td><td>95</td></tr>
</table>

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	**200**

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

ESTA PÁGINA NÃO ESTÁ IMPRESSA PROPOSITADAMENTE

Prova 635

2.ª Fase

CADERNO 2