

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 1

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

7 Páginas

Caderno 1: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.
É permitido o uso de calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro e transferidor.

Só é permitido o uso de calculadora no Caderno 1.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As citações dos itens de cada caderno encontram-se no final do respetivo caderno.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1. Na Figura 1, está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, um paralelepípedo retângulo $[ABCDEFGH]$

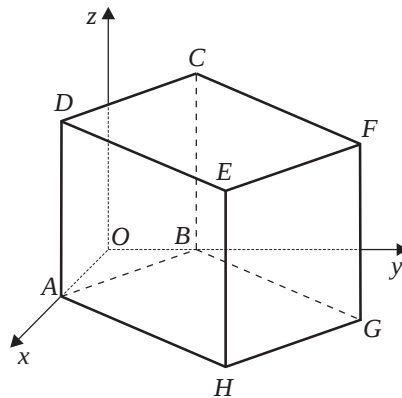


Figura 1

Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao eixo Ox e o vértice B pertence ao eixo Oy
- o vértice C tem coordenadas $(0,3,6)$ e o vértice G tem coordenadas $(6,11,0)$
- o plano ABC é definido pela equação $3x + 4y - 12 = 0$

1.1. Determine o volume do paralelepípedo $[ABCDEFGH]$

1.2. Seja P o ponto de coordenadas $(1,-4,3)$, e seja r a reta que passa pelo ponto P e é perpendicular ao plano ABC

Determine as coordenadas do ponto de intersecção da reta r com o plano ABC

1.3. Escolhe-se, ao acaso, um vértice do paralelepípedo e, seguidamente, também ao acaso, escolhe-se um outro vértice, diferente do anterior.

Designa-se por X o primeiro vértice escolhido e por Y o segundo vértice escolhido.

Qual é a probabilidade de a terceira coordenada do vetor $\overrightarrow{XY}$ ser igual a zero?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Uma escola secundária tem apenas turmas de 10.º, 11.º e 12.º anos.

2.1. Relativamente aos alunos desta escola, sabe-se que:

- $\frac{3}{5}$ dos alunos do 10.º ano são rapazes;
- $\frac{11}{21}$ dos alunos da escola são rapazes;
- $\frac{1}{7}$ dos alunos da escola são rapazes e frequentam o 10.º ano.

Escolhe-se, ao acaso, um aluno dessa escola.

Determine a probabilidade de o aluno escolhido ser uma rapariga e não frequentar o 10.º ano.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às centésimas.

2.2. Uma turma dessa escola tem 26 alunos, dos quais 15 são raparigas.

O delegado de turma é um rapaz.

Pretende-se formar uma comissão com três alunos desta turma, para organizar uma festa de fim de ano.

Quantas comissões diferentes, que incluam rapazes e raparigas, se podem formar, sabendo-se que o delegado de turma tem de fazer parte da comissão?

(A) 195

(B) 215

(C) 235

(D) 255

3.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 3.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 3.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

3.1. Uma caixa contém duas bolas brancas e três bolas pretas.

Retiram-se, ao acaso e em simultâneo, duas bolas da caixa.

Seja X a variável aleatória «número de bolas brancas retiradas».

Qual é o valor médio da variável aleatória X ?

(A) 0,9

(B) 0,8

(C) 0,7

(D) 0,6

3.2. De um triângulo, sabe-se que os comprimentos dos seus lados são 4, 5 e 6

Seja α a amplitude do maior ângulo interno desse triângulo.

Qual é o valor de $\sin \alpha$, arredondado às milésimas?

(A) 0,989

(B) 0,992

(C) 0,995

(D) 0,998

4. O nível, N , de um som, medido em decibéis, é função da sua intensidade, I , medida em microwatt por metro quadrado ($\mu\text{W}/\text{m}^2$), de acordo com a igualdade

$$N = 60 + 10 \log_{10} I, \quad \text{com } I > 0$$

Relativamente ao som de um certo despertador, sabe-se que, aumentando a sua intensidade em $150 \mu\text{W}/\text{m}^2$, o seu nível passa a ser 1,4% do quadrado do nível inicial.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o valor da intensidade inicial do som desse despertador, sabendo-se que pertence ao intervalo $[20, 80]$ e que, neste intervalo, esse valor é único.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- reproduza o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) obter o valor pedido;
- apresente esse valor em $\mu\text{W}/\text{m}^2$, arredondado às unidades.

5. Para um certo número real k , é contínua em $\mathbb{R}$ a função f , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \log_3 k & \text{se } x = 1 \\ \frac{x^2 - 1}{x - 1} & \text{se } x \neq 1 \end{cases}$$

Qual é o valor de k ?

(A) 5

(B) 6

(C) 8

(D) 9

6. Sejam a e b dois números reais diferentes de zero.

Sabe-se que 2 , a e b são três termos consecutivos de uma progressão geométrica.

Sabe-se ainda que $a - 2$, b e 2 são três termos consecutivos de uma progressão aritmética.

Determine a e b

7. Na Figura 2, está representado, no plano complexo, o quadrado $[ABCD]$

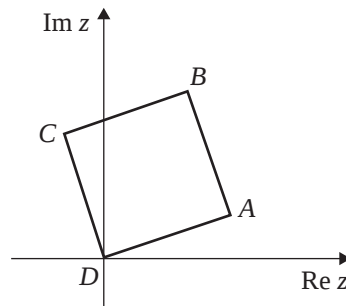


Figura 2

Sabe-se que o ponto A é o afixo (imagem geométrica) de um número complexo z e que o ponto D é o afixo (imagem geométrica) do complexo nulo.

Qual é o número complexo cujo afixo (imagem geométrica) é o ponto B ?

(A) $z(1+i)$

(B) iz

(C) $i^3 z$

(D) $z(2+i)$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item											
Cotação (em pontos)											
1.1.	1.2.	1.3.	2.1.	2.2.	3.1.	3.2.	4.	5.	6.	7.	
12	12	12	13	8	8		12	8	12	8	105

Prova 635
2.^a Fase
CADERNO 1

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2019

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 139/2012, de 5 de julho

Caderno 2

Duração da Prova (Caderno 1 + Caderno 2): 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

6 Páginas

Caderno 2: 75 minutos. Tolerância: 15 minutos.

Não é permitido o uso de calculadora.

8. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $z_1 = 2 - 3i$ e $z_2 = 1 - 2i$

Mostre que o afixo (imagem geométrica) do número complexo $w = \frac{3z_1 - i \overline{z_2}}{1 + i^7}$ pertence à circunferência de centro no afixo (imagem geométrica) de z_1 e raio igual a $\sqrt{53}$

9.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 9.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 9.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

- 9.1. Na Figura 3, está representada a região admissível de um problema de Programação Linear.

Esta região corresponde ao sistema

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x \leq 150 \\ y \leq 300 \\ x + y \leq 400 \end{cases}$$

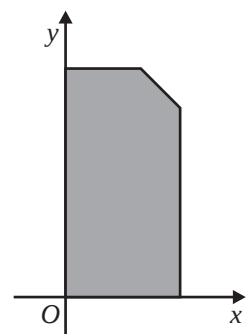


Figura 3

Qual é o valor máximo que a função objetivo, definida por $L = 2x + y$, pode alcançar nesta região?

- (A) 450 (B) 500 (C) 550 (D) 600

PMC2015

- 9.2. Qual é o valor de $\sin\left(3 \arccos \frac{1}{2}\right)$?

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) 0 (D) 1

10. Na Figura 4, está representada, num referencial o.n. xOy , a reta AB

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo negativo Ox e o ponto B pertence ao semieixo positivo Oy
- a reta AB tem equação $y = 2x + 4$

Seja M o ponto médio do segmento de reta $[AB]$

Quais são as coordenadas do ponto M ?

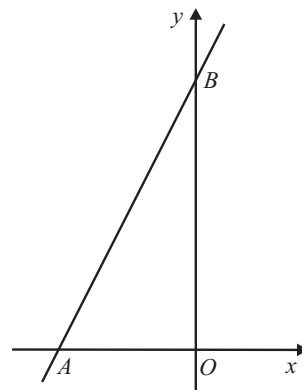


Figura 4

(A) $\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$ (B) $(-1, 2)$

(C) $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ (D) $(-2, 4)$

11.

Os **dois** itens que se apresentam a seguir são itens em alternativa.

O **item 11.1.** integra-se nos Programas de Matemática A, de 10.º, 11.º e 12.º anos, homologados em 2001 e 2002 (**P2001/2002**).

O **item 11.2.** integra-se no Programa e Metas Curriculares de Matemática A, implementado em 2015-2016 (**PMC2015**).

Responda apenas a um dos dois itens.

Na sua folha de respostas, identifique claramente o item selecionado.

P2001/2002

11.1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, a reta r definida por $\frac{x-1}{2} = \frac{3-y}{4} = z$

Qual dos seguintes vetores pode ser um vetor diretor de uma reta perpendicular à reta r ?

(A) $\vec{a} (2, 4, 1)$ (B) $\vec{b} (-3, 1, 0)$

(C) $\vec{c} (1, 1, 2)$ (D) $\vec{d} (-4, 2, 0)$

PMC2015

11.2. Qual é, para qualquer número real positivo a , o limite da sucessão $\left(\frac{n + \ln a}{n}\right)^{n+2}$?

(A) a^2 (B) $2a$ (C) a (D) $\sqrt{a}$

12. Considere a função h , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por $h(x) = \frac{e^x}{x-1}$

12.1. Estude a função h quanto à existência de assíntotas do seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

12.2. Resolva, em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, a equação $(x-1) \times h(x) + 2e^{-x} = 3$

13. Seja g a função definida em $]0, \pi[$ por $g(x) = \frac{1}{4} \cos(2x) - \cos x$

13.1. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem concavidade voltada para cima;
- as coordenadas do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g , caso este(s) exista(m).

13.2. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right]$, definida por $f(x) = g(-x) + g\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

Qual das expressões seguintes também pode definir a função f ?

(A) $\sin x + \cos x$

(B) $-\sin x - \cos x$

(C) $\sin x - \cos x$

(D) $-\sin x + \cos x$

14. Na Figura 5, está representado o gráfico da função f , definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = x^2$

Considere que um ponto P , de abscissa positiva, se desloca sobre o gráfico da função f

Para cada posição do ponto P , seja:

- r a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto;
- s a reta perpendicular a r e tangente ao gráfico de f
- Q o ponto de tangência da reta s com o gráfico de f
- I o ponto de intersecção das retas r e s

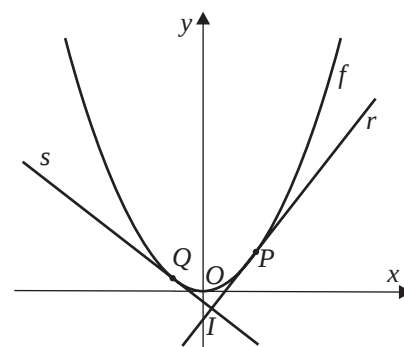


Figura 5

Mostre que, qualquer que seja a abscissa do ponto P , a ordenada do ponto I é sempre igual a $-\frac{1}{4}$

Sugestão: Designe a abscissa do ponto P por a

FIM

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item											
Cotação (em pontos)											
8.	9.1.	9.2.	10.	11.1.	11.2.	12.1.	12.2.	13.1.	13.2.	14.	
13	8		8	8		14	13	13	8	10	95

TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)	200
-------------------------------	-----

Prova 635
2.^a Fase
CADERNO 2