

Exame Final Nacional de Matemática A
Prova 635 | 1.ª Fase | Ensino Secundário | 2025
12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos.

8 Páginas

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As citações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: $\text{Semiperímetro} \times \text{Apótema}$

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$

$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u'$ ($n \in \mathbb{R}$)

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

* 1. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{3n}$?

- (A) $e + 3$ (B) $3e$ (C) e^3 (D) $\frac{e}{3}$

2. Seja g a função, de domínio $]-\infty, \pi]$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{1 - \sqrt{1-x}} & \text{se } x < 0 \\ 2 \sin^2 x - \sqrt{3}x + 2 & \text{se } 0 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Resolva os itens 2.1. e 2.2. sem recorrer à calculadora.

* 2.1. Averigue se a função g é contínua em $x = 0$.

* 2.2. Estude, no intervalo $]0, \pi]$, a função g quanto à monotonia e quanto à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, apresente os intervalos de monotonia e os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos.

* 3. O produto do segundo elemento pelo penúltimo elemento de uma dada linha do triângulo de Pascal é 625. Qual é o quinto elemento da linha anterior?

- (A) 10 626 (B) 12 650 (C) 42 504 (D) 53 130

4. Uma academia de dança oferece as modalidades de *ballet* clássico e de dança contemporânea, entre outras.

Relativamente aos alunos que frequentam a academia, sabe-se que:

- 60% estão inscritos em *ballet* clássico;
- 25% estão inscritos em dança contemporânea e não estão inscritos em *ballet* clássico;
- metade dos inscritos em dança contemporânea também estão inscritos em *ballet* clássico.

Selecionou-se, ao acaso, um aluno da academia que não está inscrito em dança contemporânea.

Determine a probabilidade de esse aluno estar inscrito em *ballet* clássico.

Apresente o resultado na forma de dízima.

- * 5. Na tabela seguinte, apresentam-se os dados relativos ao diâmetro biparietal, x , em centímetros, medido na trigésima quarta semana de gravidez, e ao correspondente perímetro cefálico, y , em centímetros, medido à nascença, de uma amostra de oito recém-nascidos numa maternidade.

Diâmetro biparietal em cm (x)	Perímetro cefálico em cm (y)
7,49	30,36
7,81	31,99
8,21	33,66
8,30	35,26
8,66	35,51
8,76	34,86
9,04	35,30
9,24	37,63

Complete o texto seguinte, seleccionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, I, II, III e IV, seguido da opção, a), b) ou c), seleccionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana dos diâmetros biparietais apresentados excede a respetiva média, arredondada às centésimas, em I cm.

A amplitude da amostra dos perímetros cefálicos apresentados é II cm.

O coeficiente de correlação linear entre as variáveis x e y , apresentadas na tabela, arredondado às centésimas, é III .

Admitindo a validade do modelo de regressão linear de y em função de x , e com base nas estimativas dos parâmetros, arredondadas às milésimas, para um recém-nascido, nesta maternidade, cujo diâmetro biparietal na trigésima quarta semana de gravidez tenha sido 8,50 cm, estima-se que o perímetro cefálico à nascença seja, aproximadamente, IV cm.

I	II	III	IV
a) 0,04	a) 2,58	a) 0,87	a) 34,54
b) 0,7	b) 3,64	b) 0,94	b) 36,11
c) 1,75	c) 7,27	c) 3,54	c) 41,62

10. Na Figura 3, está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, o prisma triangular $[ABCDEF]$.

Sabe-se que:

- os pontos A e B têm coordenadas $(4, 2, 0)$ e $(2, 3, -3)$, respetivamente;
- o ponto C pertence ao plano mediador do segmento de reta $[AB]$;
- a reta DF é definida pela equação vetorial $(x, y, z) = (-7, 4, 2) + k(1, 1, -5)$, $k \in \mathbb{R}$.

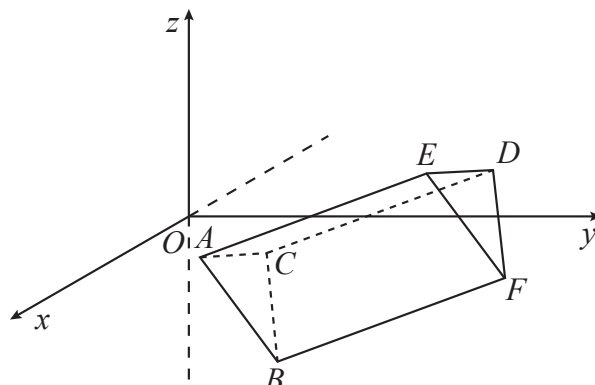


Figura 3

* 10.1. Qual das equações seguintes define uma reta perpendicular à reta DF e que passa no ponto A ?

- (A) $(x, y, z) = (-1, 2, 1) + k(5, 0, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
- (B) $(x, y, z) = (4, -3, -1) + k(0, 5, 1)$, $k \in \mathbb{R}$
- (C) $(x, y, z) = (-6, 2, -2) + k(5, 0, -1)$, $k \in \mathbb{R}$
- (D) $(x, y, z) = (4, 8, -2) + k(0, 5, 1)$, $k \in \mathbb{R}$

* 10.2. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto C .

* 11. Numa certa região, foi localizado um enxame de gafanhotos.

Admita que o número, G , em milhões, de gafanhotos do enxame, x semanas após as zero horas do dia em que este foi localizado, é dado, aproximadamente, por

$$G(x) = 0,9e^{-0,6x}(x + 0,5)^3, \text{ com } x \geq 0$$

De acordo com o modelo, existe um único instante a partir do qual, passadas quatro semanas, o número de gafanhotos ficou reduzido a metade do número de gafanhotos existentes nesse instante.

Determine, recorrendo à calculadora, quantos dias decorreram desde as zero horas do dia em que o enxame foi localizado até esse instante.

Apresente o resultado arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

- apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
- represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação;
- apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondada(s) às centésimas.

12. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = 3e^x - 2e^{-x}$$

Resolva os itens **12.1.** e **12.2.** sem recorrer à calculadora, exceto em eventuais cálculos numéricos.

12.1. Considere, em referencial o.n. Oxy , a representação gráfica da função f e o trapézio $[OCAB]$, tais que:

- o ponto A é o ponto de intersecção do gráfico da função f com a reta de equação $y = 5$;
- o ponto B pertence ao gráfico da função f e ao eixo Oy ;
- o ponto C pertence ao eixo Ox e tem abcissa igual à abcissa do ponto A .

Determine a área do trapézio $[OCAB]$.

Apresente o resultado na forma $\ln(a)$, com $a > 0$.

12.2. Mostre, recorrendo ao teorema de Bolzano-Cauchy, que o gráfico da função f intersecta a reta de equação $y = 3x + 4$ em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]0, 1[$.

*** 13.** Considere uma função, f , de domínio $\mathbb{R}$, diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sabe-se que:

- a função f é crescente em $] -\infty, 1[$ e em $]1, +\infty[$;
- a reta de equação $x = 1$ é assíntota ao gráfico da função f .

Considere as proposições seguintes.

I. A função f é contínua em $x = 1$.

II. A reta de equação $y = -x + 2$ é tangente ao gráfico da função f num ponto de abcissa diferente de 1.

Justifique que as proposições I e II são falsas.

Na sua resposta, apresente, para cada uma das proposições, uma razão que justifique a sua falsidade.

14. Considere uma sucessão de composições geométricas, construídas a partir de um semicírculo de raio 1 .
Na Figura 4, estão representadas as três primeiras composições dessa sucessão.

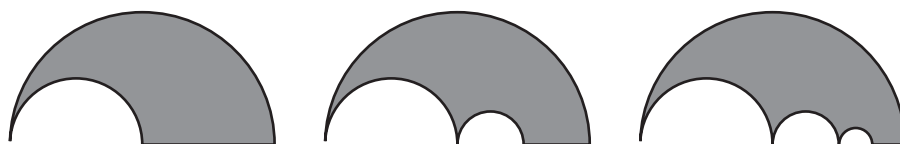


Figura 4

Tal como é ilustrado na Figura 4:

- a 1.^a composição foi obtida retirando-se ao semicírculo inicial um semicírculo nele contido, de raio $\frac{1}{2}$;
- a 2.^a composição foi obtida retirando-se à 1.^a composição um semicírculo nela contido, de raio $\frac{1}{4}$;
- a 3.^a composição foi obtida retirando-se à 2.^a composição um semicírculo nela contido, de raio $\frac{1}{8}$;
- e assim sucessivamente, retirando-se, em cada composição, um semicírculo contido na composição anterior, com metade do raio do semicírculo retirado nessa composição, de modo que o diâmetro de cada semicírculo retirado seja colinear com o diâmetro do semicírculo inicial.

Determine o perímetro da 20.^a composição geométrica desta sucessão.

Apresente o resultado arredondado às centésimas.

- * 15. Sejam a , b e c números reais não nulos, e seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = ax^3 + bx + c$$

Seja r uma reta que intersecta o gráfico da função f no ponto de abcissa zero.

Mostre que, se a reta r intersectar o gráfico da função f noutros dois pontos distintos, então esses pontos têm abcissas simétricas.

FIM

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	1.	2.1.	2.2.	3.	5.	6.	8.	10.1.	10.2.	11.	13.	15.	Subtotal
Cotação (em pontos)	12	14	14	12	12	14	12	12	14	14	14	14	158
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	4.	7.		9.		12.1.		12.2.		14.		Subtotal	
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												42
TOTAL													200