Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2025

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Critérios de Classificação 14 Páginas

CRITÉRIOS GERAIS DE CLASSIFICAÇÃO

A classificação a atribuir a cada resposta resulta da aplicação dos critérios gerais e dos critérios específicos apresentados para cada item e é expressa por um número inteiro.

As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Em caso de omissão ou de engano na identificação de uma resposta, esta pode ser classificada se for possível identificar inequivocamente o item a que diz respeito.

Se for apresentada mais do que uma resposta ao mesmo item, só é classificada a resposta que surgir em primeiro lugar.

ITENS DE SELEÇÃO

As respostas aos itens de seleção podem ser classificadas de forma dicotómica ou por níveis de desempenho, de acordo com os critérios específicos. No primeiro caso, a pontuação só é atribuída às respostas corretas, sendo todas as outras respostas classificadas com zero pontos. No caso da classificação por níveis de desempenho, a cada nível corresponde uma dada pontuação, de acordo com os critérios específicos.

Nas respostas aos itens de seleção, a transcrição do texto da opção escolhida é considerada equivalente à indicação da letra ou do número correspondente.

ITENS DE CONSTRUÇÃO

Nos itens de construção, os critérios de classificação podem apresentar-se organizados apenas por níveis de desempenho, por parâmetros, com os respetivos níveis de desempenho, ou por etapas.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados apenas por níveis de desempenho, a cada nível de desempenho corresponde uma dada pontuação. Se permanecerem dúvidas quanto ao nível a atribuir, deve optar-se pelo nível mais elevado de entre os dois tidos em consideração. Qualquer resposta que não atinja o nível 1 de desempenho é classificada com zero pontos.

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por parâmetros, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas aos parâmetros seguintes: (A) Conteúdos, (B) Linguagem Científica. A atribuição da classificação de zero pontos no parâmetro (A) implica a atribuição de zero pontos no parâmetro (B).

Nos itens em que os critérios de classificação se apresentam organizados por etapas, a classificação a atribuir à resposta resulta da soma das pontuações atribuídas às etapas apresentadas e da aplicação dos critérios de classificação definidos para situações específicas.

As respostas que não apresentem exatamente os termos ou expressões constantes nos critérios específicos de classificação são classificadas em igualdade de circunstâncias com aquelas que os apresentem, desde que o seu conteúdo seja cientificamente válido, adequado ao solicitado e enquadrado pelos documentos curriculares de referência.

A classificação das respostas aos itens que envolvam o uso obrigatório das potencialidades gráficas da calculadora tem em conta a apresentação, num referencial, do gráfico da função ou dos gráficos das funções visualizados.

No quadro seguinte, apresentam-se os critérios de classificação a aplicar, em situações específicas, às respostas aos itens de construção cujos critérios se apresentam organizados por etapas.

Situação	**Classificação**
1. Utilização de processos de resolução que não estão previstos no critério específico de classificação.	É aceite qualquer processo de resolução cientificamente correto, desde que enquadrado pelos documentos curriculares de referência da disciplina (ver nota 1). O critério específico é adaptado ao processo de resolução apresentado.
2. Utilização de processos de resolução que não respeitem as instruções dadas [exemplo: «sem recorrer à calculadora»].	A etapa em que a instrução não é respeitada e todas as etapas subsequentes que dela dependam são pontuadas com zero pontos.
3. Apresentação apenas do resultado final.	A resposta é classificada com zero pontos.
4. Ausência de apresentação de cálculos ou de justificações necessários à resolução de uma etapa.	A etapa é pontuada com zero pontos.
5. Ausência de apresentação explícita de uma etapa que não envolva cálculos ou justificações.	Se a resolução apresentada permitir perceber inequivocamente que a etapa foi percorrida, esta é pontuada com a pontuação prevista. Caso contrário, a etapa é pontuada com zero pontos, bem como todas as etapas subsequentes que dela dependam.
6. Transcrição incorreta de dados do enunciado que não altere o que se pretende avaliar com o item.	Se a dificuldade da resolução do item não diminuir, é subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas. Se a dificuldade da resolução do item diminuir, o item é classificado do modo seguinte: – nas etapas em que a dificuldade da resolução diminuir, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista; – nas etapas em que a dificuldade da resolução não diminuir, a pontuação é atribuída de acordo com os critérios específicos de classificação.
7. Transcrição incorreta de um número ou de um sinal, na resolução de uma etapa.	Se a dificuldade da resolução da etapa não diminuir, é subtraído um ponto à pontuação da etapa. Se a dificuldade da resolução da etapa diminuir, a pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
8. Ocorrência de um erro ocasional num cálculo, na resolução de uma etapa.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa em que o erro ocorre. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).

9. Ocorrência de um erro que revela desconhecimento de conceitos, de regras ou de propriedades, na resolução de uma etapa.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa é a parte inteira de metade da pontuação prevista. As etapas subsequentes são pontuadas de acordo com os efeitos do erro cometido (ver nota 2).
10. Resolução incompleta de uma etapa.	Se à resolução da etapa faltar apenas a passagem final, é subtraído um ponto à pontuação da etapa; caso contrário, a pontuação máxima a atribuir é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
11. Apresentação de cálculos intermédios com um número de casas decimais diferente do solicitado ou apresentação de um arredondamento incorreto.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
12. Apresentação do resultado final que não respeita a forma solicitada [exemplo: é pedido o resultado na forma de fração, e a resposta apresenta-se na forma decimal].	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
13. Utilização de valores exatos nos cálculos intermédios e apresentação do resultado final com aproximação quando deveria ter sido apresentado o valor exato.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
14. Utilização de valores aproximados numa etapa quando deveriam ter sido usados valores exatos.	A pontuação máxima a atribuir a essa etapa, bem como a cada uma das etapas subsequentes que dela dependam, é a parte inteira de metade da pontuação prevista.
15. Apresentação do resultado final com um número de casas decimais diferente do solicitado, ou apresentação do resultado final incorretamente arredondado.	É subtraído um ponto à pontuação da etapa correspondente à apresentação do resultado final.
16. Omissão da unidade de medida na apresentação do resultado final.	A etapa relativa à apresentação do resultado final é pontuada com a pontuação prevista.
17. Apresentação de elementos em excesso face ao solicitado.	Se os elementos em excesso não afetarem a caracterização do desempenho, a classificação a atribuir à resposta não é desvalorizada. Se os elementos em excesso afetarem a caracterização do desempenho, são subtraídos dois pontos à soma das pontuações atribuídas, salvo se houver indicação em contrário no critério específico de classificação.
18. Utilização de simbologias ou de expressões inequivocamente incorretas do ponto de vista formal.	É subtraído um ponto à soma das pontuações atribuídas, exceto: – se as incorreções ocorrerem apenas em etapas já pontuadas com zero pontos; – nos casos de uso do símbolo de igualdade em que, em rigor, deveria ter sido usado o símbolo de igualdade aproximada.

Nota 1 – A título de exemplo, faz-se notar que não são aceites processos de resolução que envolvam a aplicação da regra de Cauchy, da regra de L'Hôpital ou de resultados da teoria de matrizes.

Nota 2 – Se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes não diminuir, estas são pontuadas de acordo com os critérios específicos de classificação; se a dificuldade da resolução das etapas subsequentes diminuir, a pontuação máxima a atribuir a cada uma delas é a parte inteira de metade da pontuação prevista.

CRITÉRIOS ESPECÍFICOS DE CLASSIFICAÇÃO

1. .... **12 pontos**

(A)

2. .... **12 pontos**

I → c) II → b) III → c) IV → b)

Este item deve ser classificado de acordo com os níveis de desempenho seguintes.

Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
3	Completa o texto com as 4 opções corretas.	12
2	Completa o texto com 3 opções corretas.	8
1	Completa o texto com 2 opções corretas.	4

3.1. .... **14 pontos**

Reconhecer que a função f é contínua em $x=0$ se $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = f(0)$ .... 2 pontos

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{x^2 + \ln(ex+e)}{x+1}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ .... 1 ponto

Determinar $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x)$ .... 8 pontos

Esta etapa pode ser resolvida por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1-e^{-x}}{x}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1-e^{-x}}{x} \underset{y=-x}{=} \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{1-e^{y}}{-y}$ .... 4 pontos

Obter $\lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{1-e^{y}}{-y} = \lim\limits_{y \to 0^+} \dfrac{e^{y}-1}{y}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = 1$ .... 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-e^{-x}}{x}$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-e^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\frac{1}{e^x}}{x}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1-\frac{1}{e^x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{xe^x}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{xe^x} = \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x-1}{x} \times \lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{e^x}$ .... 2 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 1$ .... 2 pontos

Referir que $f(0)=1$ .... 1 ponto

Concluir que a função f é contínua em $x=0$ .... 1 ponto

3.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que a reta de equação $y = x-1$ é assíntota ao gráfico da função f, quando $x\to+\infty$, se $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = 0$ .... 5 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1} - x + 1\right)$ .... 1 ponto

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1} - x + 1\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(ex+e)+1}{x+1}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(ex+e)+1}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(ex+e)}{x+1} + \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x+1}$ 2 pontos

Escrever $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(ex+e)}{x+1} \underset{y=ex+e}{=} e \lim\limits_{y\to+\infty} \frac{\ln y}{y}$ .... 3 pontos

Obter $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-(x-1)) = 0$ .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ .... 8 pontos

Escrever $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x(x+1)}$ .... 1 ponto

Escrever

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}+\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ex+e)}{x^2+x}$ ...... 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+x}=1$ .... 1 ponto

Obter $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ex+e)}{x^2+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\times\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ex+e)}{x+1}$ .... 1 ponto

Escrever $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ex+e)}{x+1}\underset{y=ex+e}{=}e\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln y}{y}$ .... 2 pontos

Obter $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ .... 2 pontos

Determinar $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ .... 5 pontos

Escrever $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1}-x\right)$ .... 1 ponto

Obter $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ex+e)-x}{x+1}$ ...... 1 ponto

Escrever

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ex+e)-x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(ex+e)}{x+1}-\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$ .... 1 ponto

Obter $\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x)=-1$ .... 1 ponto

Concluir o pretendido .... 1 ponto

4. .... **14 pontos**

Determinar o domínio da condição $\left(\left]-\infty,\frac{7}{2}\right[\right)$ .... 2 pontos

Obter $e^x\ln(4-x)-5\ln(4-x)=(5-e^x)\ln(7-2x)$ .... 1 ponto

Obter $(e^x-5)\ln(4-x)+(e^x-5)\ln(7-2x)=0$ .... 2 pontos

Obter $(e^x-5)(\ln(4-x)+\ln(7-2x))=0$ .... 1 ponto

Obter $(e^x-5)\ln((4-x)(7-2x))=0$ .... 1 ponto

Obter $e^x-5=0\ \vee\ \ln((4-x)(7-2x))=0$ .... 1 ponto

Reconhecer que $(4-x)(7-2x)=1$ .... 1 ponto

Resolver a condição $e^x-5=0\ \vee\ (4-x)(7-2x)=1$ .... 2 pontos

Apresentar os valores pedidos ($\ln 5$ e 3) (**ver nota**).. 3 pontos

Nota – Se forem apresentados valores que não pertencem ao domínio da condição, a pontuação máxima a atribuir a esta etapa é 2 pontos.

5. .... **12 pontos**

(A)

6. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Determinar o número de alunos com 17 anos e o número de alunos com 18 anos .... 4 pontos

Apresentar o número de casos possíveis $({}^{25}C_6)$ .... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis $({}^{7}C_3 \times 16)$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Obter o valor pedido $(0{,}003)$ (**ver nota 2**) .... 2 pontos

2.º Processo

Determinar o número de alunos com 17 anos e o número de alunos com 18 anos .... 4 pontos

Apresentar o número de casos possíveis $({}^{25}A_6)$ .... 4 pontos

Apresentar o número de casos favoráveis $({}^{7}C_3 \times 16 \times 6!)$ (**ver nota 1**) .... 4 pontos

Obter o valor pedido $(0{,}003)$ (**ver nota 2**) .... 2 pontos

Notas:

1. Se a expressão apresentada não for equivalente a ${}^{7}C_3 \times 16$ (1.º processo), ou a ${}^{7}C_3 \times 16 \times 6!$ (2.º processo), a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.
2. Se a etapa relativa ao número de casos possíveis e a etapa relativa ao número de casos favoráveis tiverem sido pontuadas com 0 pontos, ou se o valor obtido não pertencer ao intervalo $[0, 1]$, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos.

7. .... **12 pontos**

(D)

8. .... **14 pontos**

Identificar i^{15} com $-i$ .... 1 ponto

Obter $\dfrac{5ai^{15}}{1-2i} = 2a - ai$ .... 3 pontos

Escrever $\sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$ na forma algébrica $(1-i)$ .... 2 pontos

Obter $z = 2a + 1 + (-a-1)i$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Reconhecer que $-a-1-2a-1 = 1$ .... 2 pontos

Obter o valor de a (-1) .... 1 ponto

Obter $z = -1$ .... 1 ponto

Escrever z na forma trigonométrica ($e^{i\pi}$, ou equivalente) .... 2 pontos

9. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Designemos por D o ponto de intersecção da reta AC com a reta de equação $x = 1$ e por E o ponto de coordenadas $(1, 0)$.

Reconhecer que a área do triângulo $[ABC]$ é dada por $\dfrac{\overline{AC} \times \overline{BD}}{2}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\overline{AC} = -\cos\alpha$ .... 3 pontos

Reconhecer que $\overline{DE} = \operatorname{sen}\alpha$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\overline{BE} = -\operatorname{tg}\alpha$ .... 3 pontos

Obter $\dfrac{-\cos\alpha(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\alpha)}{2}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Substituir $\operatorname{tg}\alpha$ por $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$ .... 1 ponto

Concluir o pretendido .... 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que a área do triângulo $[ABC]$ é a soma das áreas dos triângulos $[AOC]$ e $[OBC]$ .... 2 pontos

Reconhecer que a área do triângulo $[AOC]$ é dada por $\dfrac{\overline{AC} \times \overline{OC}}{2}$ .... 1 ponto

Reconhecer que a área do triângulo $[OBC]$ é dada por $\dfrac{\overline{OC} \times 1}{2}$ .... 2 pontos

Reconhecer que $\overline{AC} = -\cos \alpha$ .... 3 pontos

Reconhecer que $\overline{OC} = \operatorname{sen} \alpha$ .... 2 pontos

Obter $\dfrac{\operatorname{sen} \alpha}{2} - \dfrac{\cos \alpha \operatorname{sen} \alpha}{2}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Reconhecer que $\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \dfrac{\operatorname{sen}(2\alpha)}{2}$ .... 1 ponto

Concluir o pretendido .... 1 ponto

10.1. .... **12 pontos**

(D)

10.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Obter a altura da pirâmide $(2\sqrt{6})$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\|\overrightarrow{MV}\| = 2\sqrt{6}$ .... 1 ponto

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(2, -1, 1)$ é um vetor diretor da reta MV .... 2 pontos

Escrever uma equação vetorial da reta MV $((x, y, z) = (2, -1, 3) + k(2, -1, 1),\ k \in \mathbb{R})$ .... 2 pontos

Reconhecer que as coordenadas do ponto V são da forma $(2 + 2k, -1 - k, 3 + k)$ .... 2 pontos

Obter $\|\overrightarrow{MV}\| = \sqrt{(2k)^2 + (-k)^2 + k^2}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $6k^2 = 24$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter os valores de k $(-2$ e $2)$ .... 1 ponto

Obter o pedido $((6, -3, 5))$ .... 2 pontos

2.º Processo

Obter a altura da pirâmide $(2\sqrt{6})$ .... 1 ponto

Reconhecer que $\|\overrightarrow{MV}\| = 2\sqrt{6}$ .... 1 ponto

Reconhecer que $V = M + \overrightarrow{MV}$ .... 1 ponto

Reconhecer que o vetor de coordenadas $(2, -1, 1)$ e o vetor $\overrightarrow{MV}$
são colineares .... 1 ponto

Reconhecer que as coordenadas do vetor $\overrightarrow{MV}$ são da forma $(2k, -k, k)$ ... 2 pontos

Obter $\|\overrightarrow{MV}\| = \sqrt{(2k)^2 + (-k)^2 + k^2}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Obter $6k^2 = 24$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Obter os valores de k $(-2$ e $2)$ .... 1 ponto

Obter as coordenadas do vetor $\overrightarrow{MV}$ $((4, -2, 2))$ .... 2 pontos

Obter o pedido $((6, -3, 5))$ .... 2 pontos

10.3. .... **14 pontos**

Tópicos de resposta

- Explicação da parcela ${}^6C_4 \times 2 \times 4!$.
  Exemplo: Existem ${}^6C_4$ maneiras de escolher quatro das seis cores disponíveis para pintar as faces da pirâmide com quatro cores; para cada uma dessas maneiras, existem duas maneiras de escolher as duas faces opostas que têm de ser pintadas com a mesma cor e, para cada uma destas escolhas, existem $4!$ maneiras de pintar as faces da pirâmide usando as quatro cores escolhidas.

- Explicação da parcela ${}^6A_5$.
  Exemplo: Existem ${}^6A_5$ maneiras de pintar as faces da pirâmide com cinco das seis cores disponíveis, permutando as cores pelas faces.

Parâmetro	Nível	Descritor de desempenho	Pontuação
A Conteúdos	4	Apresenta, de forma completa, as duas explicações solicitadas.	12
	3	Apresenta, de forma completa, uma das explicações solicitadas e, de forma incompleta, a outra explicação.	9
	2	Apresenta, de forma completa, apenas uma das explicações solicitadas. OU Apresenta, de forma incompleta, as duas explicações solicitadas.	6
	1	Apresenta, de forma incompleta, apenas uma das explicações solicitadas.	3
B Linguagem Científica	2	Utiliza adequadamente o vocabulário específico da Matemática.	2
	1	Utiliza, embora com uma ou mais falhas, o vocabulário específico da Matemática.	1

11.1. .... **14 pontos**

Determinar $g''(x)$ (**ver nota 1**) .... 2 pontos

Escrever $g''(x)=0$ .... 1 ponto

Determinar os zeros de g'' $\left(\frac{\pi}{18}\ \text{e}\ \frac{5\pi}{18}\right)$.. 3 pontos

Apresentar um quadro de sinal de g'' e de sentido das concavidades do gráfico de g (ou equivalente) .... 3 pontos

Apresentar os intervalos em que a concavidade do gráfico de g é voltada para cima e o intervalo em que a concavidade do gráfico de g é voltada para baixo (**ver nota 2**) .... 3 pontos

Apresentar as abcissas dos pontos de inflexão $\left(\frac{\pi}{18}\ \text{e}\ \frac{5\pi}{18}\right)$ .... 2 pontos

Notas:

1. Se for evidente a intenção de determinar a derivada da função g', a pontuação mínima a atribuir a esta etapa é 1 ponto.
2. Se forem apresentados os intervalos $\left]0, \frac{\pi}{18}\right[$ e $\left]\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}\right[$, em vez de $\left]0, \frac{\pi}{18}\right]$ e $\left[\frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{2}\right[$, respetivamente, e o intervalo $\left]\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right[$, em vez de $\left[\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right]$, esta etapa deve ser considerada cumprida.

11.2. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, três processos.

Designemos por x_A a abcissa do ponto A e por y_B a ordenada do ponto B.

1.º Processo

Reconhecer que a área do triângulo é dada por $\frac{x_A \times |y_B|}{2}$ .... 1 ponto

Reconhecer que o declive da reta r é $g'(0)$ .... 2 pontos

Obter $g'(0)$ (2) .... 1 ponto

Reconhecer que o declive da reta s é $-\frac{1}{g'(0)}$ .... 1 ponto

Obter o declive da reta s $\left(-\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Reconhecer que o declive da reta s é $-\frac{y_B}{x_A}$ .... 2 pontos

Obter $y_B = \frac{x_A}{2}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Reconhecer que $y_B > 0$ .... 1 ponto

Escrever $\frac{x_A \times \frac{x_A}{2}}{2} = 12$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Resolver a equação $\frac{x_A \times \frac{x_A}{2}}{2} = 12$ .... 2 pontos

Obter o pedido $\left(4\sqrt{3}\text{, ou equivalente}\right)$ .... 1 ponto

2.º Processo

Reconhecer que a área do triângulo é dada por $\frac{x_A \times |y_B|}{2}$ .... 1 ponto

Reconhecer que o declive da reta r é $g'(0)$ .... 2 pontos

Obter $g'(0)$ (2) .... 1 ponto

Reconhecer que o declive da reta s é $-\frac{1}{g'(0)}$ .... 1 ponto

Obter o declive da reta s $\left(-\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Escrever $y = -\frac{1}{2}x + y_B$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Reconhecer que $0 = -\frac{1}{2}x_A + y_B$ .... 1 ponto

Obter $y_B = \frac{x_A}{2}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Reconhecer que $y_B > 0$ .... 1 ponto

Escrever $\frac{x_A \times \frac{x_A}{2}}{2} = 12$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Resolver a equação $\frac{x_A \times \frac{x_A}{2}}{2} = 12$ .... 2 pontos

Obter o pedido $\left(4\sqrt{3}\text{, ou equivalente}\right)$ .... 1 ponto

3.º Processo

Reconhecer que $\frac{\overline{OA} \times \overline{OB}}{2} = 12$ .... 1 ponto

Obter $\overline{OB} = \frac{24}{\overline{OA}}$ (ou equivalente) .... 1 ponto

Reconhecer que o declive da reta r é $g'(0)$ .... 2 pontos

Obter $g'(0)$ (2) .... 1 ponto

Reconhecer que o declive da reta s é $-\frac{1}{g'(0)}$ .... 1 ponto

Obter o declive da reta s $\left(-\frac{1}{2}\right)$ .... 1 ponto

Reconhecer que a ordenada na origem da reta s é positiva .... 1 ponto

Obter uma equação da reta s em função de $\overline{OA}$ $\left(y = -\frac{1}{2}x + \frac{24}{\overline{OA}}\right)$ .... 2 pontos

Resolver a equação $0 = -\frac{1}{2}\overline{OA} + \frac{24}{\overline{OA}}$ .... 3 pontos

Obter o pedido $\left(4\sqrt{3}\text{, ou equivalente}\right)$ .... 1 ponto

12. .... **14 pontos**

Reconhecer que o valor total que se prevê obter com a venda das bicicletas, é dado por $p \times N(p)$ .... 4 pontos

Apresentar a equação $p \times N(p) = 4000$ (ou uma equação equivalente) (**ver nota 1**) .... 3 pontos

Representar, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da função(ões) visualizado(s) na calculadora que permite(m) resolver a equação (**ver notas 2 e 3**) .... 4 pontos

Assinalar o ponto relevante para a resolução do problema .... 1 ponto

Obter a abcissa desse ponto $(4{,}73)$ .... 1 ponto

Apresentar o valor pedido $(473$ euros$)$ .... 1 ponto

Notas:

1. Se não for apresentada qualquer equação, a pontuação a atribuir a esta etapa é 0 pontos. As restantes etapas são pontuadas de acordo com o desempenho, desde que seja inequívoco que este corresponde à resolução de uma equação que traduz corretamente o problema.
2. Se não for apresentado um referencial, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.
3. Se não for respeitado o domínio, a pontuação a atribuir a esta etapa é desvalorizada em 1 ponto.

13. .... **14 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos.

1.º Processo

Reconhecer que as áreas dos quadrados obtidos em cada composição são termos consecutivos de uma progressão geométrica de razão $\frac{8}{9}$ .... 6 pontos

Escrever uma expressão para a área da 50.ª composição $\left(9 \times \left(\frac{8}{9}\right)^{49}\text{, ou equivalente}\right)$ .... 6 pontos

Obter o valor pedido $(0{,}028)$ .... 2 pontos

2.º Processo

Seja (a_n) a sucessão das áreas das composições geométricas da construção.

Reconhecer que a sucessão do número de quadrados retirados em cada composição, a partir da segunda (inclusive), é uma progressão geométrica de razão 8 .... 3 pontos

Reconhecer que a sucessão das áreas de cada quadrado retirado em cada composição, a partir da segunda (inclusive), é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{9}$ .... 3 pontos

Reconhecer que a sucessão das áreas dos quadrados retirados na composição de ordem n é a soma dos $n-1$ primeiros termos de uma progressão geométrica de razão $\frac{8}{9}$ e primeiro termo igual a 1 .... 4 pontos

Escrever $a_{50} = 9 - \left(1 \times \frac{1-\left(\frac{8}{9}\right)^{49}}{1-\frac{8}{9}}\right)$ .... 2 pontos

Obter o valor pedido $(0{,}028)$ .... 2 pontos

14. .... **14 pontos**

Equacionar o problema $(h(x) = x$, ou equivalente) .... 2 pontos

Considerar a função f definida por $f(x) = h(x) - x$ .... 2 pontos

Referir que f é contínua em $[0, a]$ (**ver nota**)... 2 pontos

Justificar que $f(0) \geq 0$ .... 2 pontos

Justificar que $f(a) \leq 0$ .... 2 pontos

Referir que, se $f(0) = 0$ ou se $f(a) = 0$, a intersecção existe no ponto de coordenadas $(0, 0)$ ou no ponto de coordenadas (a, a) , respetivamente . 2 pontos

Referir que, se $f(a) < 0$ e $f(0) > 0$, o teorema de Bolzano-Cauchy permite concluir o pretendido .... 2 pontos

Nota – Se apenas for referido que a função f é contínua, esta etapa deve ser considerada cumprida.

COTAÇÕES

As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.	**1.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**5.**	**7.**	**10.1.**	**10.2.**	**10.3.**	**11.1.**	**12.**	**14.**	**Subtotal**
Cotação (em pontos)	12	12	14	14	12	12	12	14	14	14	14	14	**158**
Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.	**4.**		**6.**		**8.**		**9.**		**11.2.**		**13.**		**Subtotal**
Cotação (em pontos)	3 × 14 pontos												**42**
TOTAL													**200**