REPÚBLICA PORTUGUESA

EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E INOVAÇÃO

IAVE INSTITUTO DE AVALIAÇÃO EDUCATIVA, I.P.

Exame Final Nacional de Matemática A

Prova 635 | 2.ª Fase | Ensino Secundário | 2025

12.º Ano de Escolaridade

Decreto-Lei n.º 55/2018, de 6 de julho | Decreto-Lei n.º 62/2023, de 25 de julho

Duração da Prova: 150 minutos. | Tolerância: 30 minutos. 8 Páginas

---

A prova inclui 12 itens, devidamente identificados no enunciado, cujas respostas contribuem obrigatoriamente para a classificação final. Dos restantes 6 itens da prova, apenas contribuem para a classificação final os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.

Para cada resposta, identifique o item.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de régua, compasso, esquadro, transferidor e calculadora gráfica.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

A prova inclui um formulário.

Nas respostas aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Nas respostas aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Área de um sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho\, e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\; e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ $\quad (k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\, e^u$

$(a^u)' = u'\, a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

*** 1.** Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = \dfrac{2n+4}{3n+5}$?

(A) $\dfrac{2}{3}$ **(B)** $\dfrac{4}{5}$ **(C)** $\dfrac{5}{4}$ **(D)** $\dfrac{3}{2}$

*** 2.** Na tabela seguinte, apresentam-se os dados referentes à produção de pera e de maçã, em quilogramas por hectare (kg/ha), em cada ano, de 2019 a 2023, em Portugal continental.

Ano	**2019**	**2020**	**2021**	**2022**	**2023**
Pera (kg/ha)	17 530	11 565	20 208	12 197	10 929
Maçã (kg/ha)	26 067	20 087	26 644	21 330	21 072

Fonte: Instituto Nacional de Estatística (consultado em setembro de 2024).

Complete o texto seguinte, selecionando a opção correta para cada espaço, de acordo com os dados apresentados na tabela.

Escreva, na folha de respostas, apenas cada um dos números, **I**, **II**, **III** e **IV**, seguido da opção, **a)**, **b)** ou **c)**, selecionada. A cada espaço corresponde uma só opção.

A mediana dos valores da produção de maçã excede a mediana dos valores da produção de pera em ___**I**___ kg/ha.

De 2020 para 2021, a produção de maçã teve um aumento de, aproximadamente, ___**II**___ .

No que respeita à distribuição da produção de pera, houve ___**III**___ anos em que a produção foi inferior à soma da média com o desvio padrão.

De acordo com previsões do INE, a produção acumulada de maçã, de 2019 a 2024, seria 136 270 kg/ha, enquanto a produção acumulada de pera, no mesmo período, corresponderia a 60% da produção acumulada de maçã. De acordo com os dados da tabela e com esta previsão do INE, obtém-se para o valor da produção de pera em 2024, aproximadamente, ___**IV**___ kg/ha.

I	**II**	**III**	**IV**
a) 6436	**a)** 25%	**a)** dois	**a)** 6557
b) 8554	**b)** 33%	**b)** três	**b)** 9333
c) 9133	**c)** 75%	**c)** quatro	**c)** 12 643

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{-x}}{x} & \text{se } x<0\\ 1 & \text{se } x=0\\ \dfrac{x^2+\ln(ex+e)}{x+1} & \text{se } x>0\end{cases}$$

Resolva os itens **3.1.** e **3.2.** sem recorrer à calculadora.

* **3.1.** Averigue se a função f é contínua em $x=0$.

* **3.2.** Mostre que a reta de equação $y=x-1$ é assíntota ao gráfico da função f quando $x\to+\infty$.

4. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine os números reais que são solução da equação

$$\frac{1}{2}e^x\ln(4-x)^2-5\ln(4-x)=(5-e^x)\ln(7-2x)$$

* **5.** Seja E, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma experiência aleatória, e sejam A e B dois acontecimentos ($A\subset E$ e $B\subset E$).

Sabe-se que:

- $P(A\cap\overline{B})=0{,}5$;
- $P(\overline{A}\cap\overline{B})=0{,}3$.

Qual é o valor de $P(B)$?

(A) $0{,}2$ **(B)** $0{,}3$ **(C)** $0{,}7$ **(D)** $0{,}8$

6. Uma turma do 12.º ano é constituída por 25 alunos com 17 ou 18 anos de idade.

A Isabel e o José são alunos da turma e têm 17 anos.

Sabe-se que:

- 64% dos alunos são rapazes;
- $\frac{3}{4}$ dos rapazes têm 17 anos;
- $\frac{1}{3}$ das raparigas têm 18 anos.

Pretende-se constituir um grupo de seis alunos selecionados, ao acaso, de entre todos os alunos da turma.

Determine a probabilidade de o grupo ser constituído pela Isabel, pelo José, por outro aluno (rapaz ou rapariga) com 17 anos e por três alunos (rapazes ou raparigas) com 18 anos.

Apresente o resultado na forma de dízima, arredondado às milésimas.

7. Na Figura 1, estão representados, no plano complexo, o triângulo $[OZW]$ e o ponto M.

Sabe-se que:

- $\overline{OZ} = \overline{OW}$;
- os pontos Z e W são os afixos dos números complexos z e w, respetivamente;
- um argumento de z, em radianos, é $\frac{2\pi}{15}$;
- o ponto M pertence à bissetriz do primeiro quadrante e é o ponto médio do segmento de reta $[WZ]$.

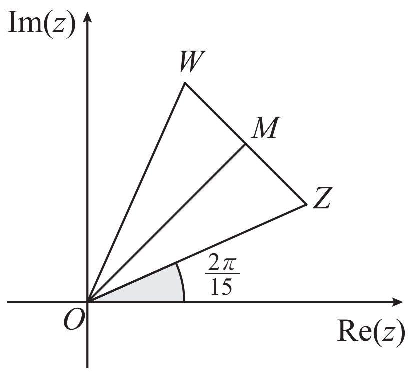

Figura 1

Qual dos seguintes valores é um argumento, em radianos, do número complexo w ?

(A) $\frac{7\pi}{60}$ **(B)** $\frac{11\pi}{60}$ **(C)** $\frac{7\pi}{30}$ **(D)** $\frac{11\pi}{30}$

8. Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, o número

$$z = \frac{5ai^{15}}{1-2i} + \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}, \text{ com } a \in \mathbb{R}$$

Sabe-se que $\operatorname{Im}(z) - \operatorname{Re}(z) = 1$.

Determine z na forma trigonométrica.

9. Na Figura 2, estão representados, em referencial o.n. Oxy, a circunferência centrada na origem e de raio 1, o triângulo $[ABC]$ e a reta de equação $x = 1$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence à circunferência;
- o ponto B pertence à reta de equação $x = 1$;
- o ponto O pertence à reta AB ;
- α é a inclinação, em radianos, da reta AB $\left(\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[\right)$;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Oy ;
- a reta AC é paralela ao eixo Ox.

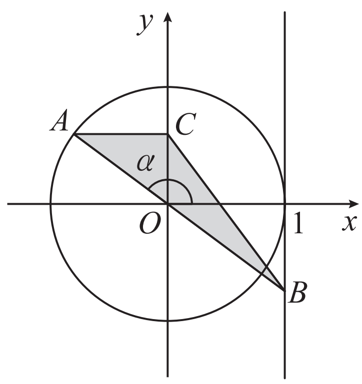

Figura 2

Mostre que a área do triângulo $[ABC]$ é dada, em função de α, por

$$\frac{2\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}(2\alpha)}{4}$$

10. Na Figura 3, está representada, em referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide regular de base quadrada $[ABCD]$ e vértice V.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = \sqrt{6}$;
- o centro da base da pirâmide, M, tem coordenadas $(2, -1, 3)$;
- o ponto V tem abcissa positiva;
- o plano ABC é definido pela equação $2x - y + z - 8 = 0$;
- o volume da pirâmide é $4\sqrt{6}$.

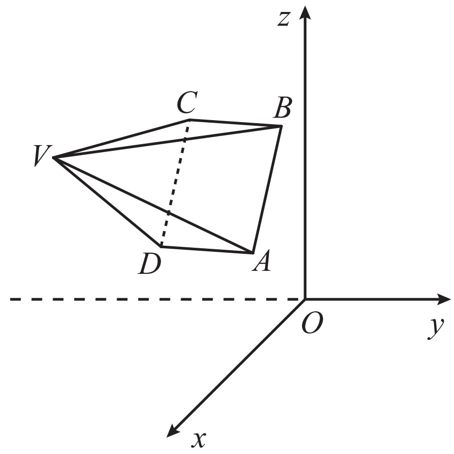

Figura 3

*** 10.1.** Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$?

(A) -6

(B) 0

(C) $2\sqrt{6}$

(D) 6

*** 10.2.** Resolva este item sem recorrer à calculadora.

Determine as coordenadas do ponto V.

*** 10.3.** Pretende-se pintar as cinco faces da pirâmide $[ABCDV]$, dispondo-se, para o efeito, de seis cores distintas.

Todas as condições seguintes deverão ser respeitadas:

- cada face é pintada com uma só cor;
- são utilizadas, no mínimo, quatro das seis cores disponíveis;
- duas faces que tenham uma aresta em comum são pintadas com cores diferentes.

A expressão seguinte representa o número total de formas possíveis de pintar as cinco faces da pirâmide respeitando as condições enunciadas.

$${}^{6}C_{4} \times 2 \times 4! + {}^{6}A_{5}$$

Explique, no contexto descrito, cada parcela desta expressão.

11. Seja g uma função diferenciável, de domínio $\mathbb{R}$, cuja derivada, g', é definida por

$$g'(x) = \cos(3x) + \frac{3}{2}x + 1$$

Resolva os itens **11.1.** e **11.2.** sem recorrer à calculadora.

* **11.1.** Estude a função g, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função g tem concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) em que o gráfico da função g tem concavidade voltada para cima;
- as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função g.

11.2. Seja r a reta tangente ao gráfico da função g no ponto de abcissa 0, e seja s uma reta perpendicular à reta r.

Sabe-se que:

- a reta s intersecta os eixos Ox e Oy nos pontos A e B, respetivamente;
- o ponto A tem abcissa positiva;
- o triângulo $[OAB]$ tem área igual a 12.

Determine a abcissa do ponto A.

* **12.** Admita que, de acordo com um estudo de mercado realizado pela Biclatour, empresa de fabrico de bicicletas, o número de unidades das bicicletas Ciclatour que se prevê vender, em função do preço, p, em centenas de euros, de cada unidade, é dado, aproximadamente, por

$$N(p) = 4000 \times e^{-0{,}34p} - 1{,}12p + 50, \quad \text{com } 2 \leq p \leq 10$$

De acordo com este modelo, sabe-se que existe um único preço para o qual o valor total que se prevê obter com a venda das bicicletas Ciclatour é igual a 4000 centenas de euros.

Determine esse preço, recorrendo à calculadora.

Apresente o resultado em euros, arredondado às unidades.

Não justifique a validade do resultado obtido na calculadora.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– represente, em referencial cartesiano, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora e assinale o(s) ponto(s) relevante(s) que lhe permitem resolver a equação;

– apresente a(s) coordenada(s) relevante(s) desse(s) ponto(s), arredondada(s) às centésimas.

13. Na Figura 4, apresentam-se as quatro primeiras composições geométricas da construção do Tapete de Sierpiński.

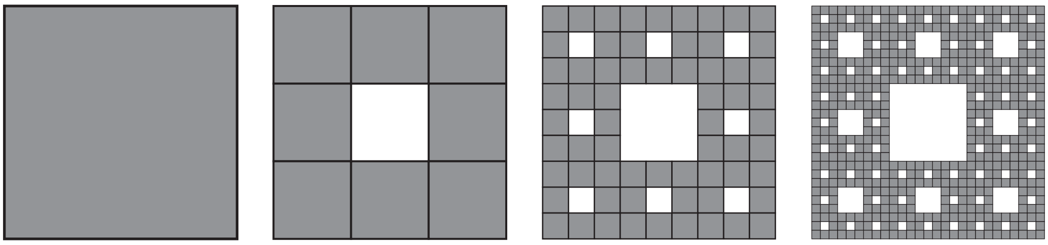

Figura 4

Tal como a figura sugere, nesta construção:

- a 1.ª composição é um quadrado;
- a 2.ª composição, com 8 quadrados, obtém-se decompondo a 1.ª em 9 quadrados iguais e removendo o quadrado central;
- cada uma das composições seguintes obtém-se decompondo cada um dos quadrados obtidos na composição anterior em 9 quadrados iguais e removendo os quadrados centrais.

Admita que, fixada uma unidade de medida, o quadrado inicial tem área igual a 9 e que se continuava a construção, de acordo com o procedimento descrito, até se obter a 50.ª composição.

Determine a área da 50.ª composição, ou seja, a área total dos quadrados que formam essa composição.

Apresente o valor pedido arredondado às milésimas.

* **14.** Seja a um número real positivo, e seja h uma função contínua de domínio $[0, a]$ e contradomínio $[0, a]$.

Prove que existe, pelo menos, um ponto do gráfico da função h que pertence à bissetriz do primeiro quadrante.

FIM

COTAÇÕES

<table>
<tr><td>As pontuações obtidas nas respostas a estes 12 itens da prova contribuem obrigatoriamente para a classificação final.</td><td>1.</td><td>2.</td><td>3.1.</td><td>3.2.</td><td>5.</td><td>7.</td><td>10.1.</td><td>10.2.</td><td>10.3.</td><td>11.1.</td><td>12.</td><td>14.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>14</td><td>158</td></tr>
<tr><td>Destes 6 itens, contribuem para a classificação final da prova os 3 itens cujas respostas obtenham melhor pontuação.</td><td colspan="2">4.</td><td colspan="2">6.</td><td colspan="2">8.</td><td colspan="2">9.</td><td colspan="2">11.2.</td><td colspan="2">13.</td><td>Subtotal</td></tr>
<tr><td>Cotação (em pontos)</td><td colspan="12">3 × 14 pontos</td><td>42</td></tr>
<tr><td colspan="13">TOTAL</td><td>200</td></tr>
</table>